

SLOVENSKÁ ŠTATISTIKA a DEMOGRAFIA

SLOVAK STATISTICS
and DEMOGRAPHY

1/2014

ročník/volume 24

Recenzovaný vedecký časopis so zameraním na prezentáciu moderných štatistických a demografických metód a postupov.

Scientific peer-reviewed journal focusing on the presentation of modern statistical and demographic methods and procedures.

Článok/Article: 2

Typ článku/Type of article: vedecký článok/scientific article

Strany/Pages: 3 – 12

Dátum vydania/Publication date: 15. január 2014/January 15, 2014



Michal PÁLEŠ

Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave

APLIKÁCIA ŠPECIFICKÝCH ROZDELENÍ PRAVDEPODOBNOСТИ NA ANALÝZU RIZIKA V PORTFÓLIU POISTNÝCH ZMLÚV

APPLICATION SPECIFIC PROBABILITY DISTRIBUTIONS FOR RISK ANALYSIS OF INSURANCE CONTRACTS

ABSTRAKT

Cieľom príspevku je prezentovať prehľad rozdelení pravdepodobnosti, ktoré možno využiť pri modelovaní rizika v aktuárskej praxi. Výklad sa zameriava na diskkrétne a spojité rozdelenia, zmesi rozdelení, zmiešané rozdelenia, zložené rozdelenia a špecifické zložené diskkrétne rozdelenia. Pri každej skupine sú uvedené základné predpoklady ich použitia. V rámci PC podpory riadenia rizika uvádzame výstupy zo softvéru, ktorý zabudovane obsahuje viaceré rozdelenia pravdepodobnosti z uvedených skupín.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present an overview of probability distributions that can be used for modeling risk in actuarial practice. Interpretation is aimed on discrete and continuous distributions, mixture distribution, mixed distribution, compound and specific compound discrete distribution. For each group are listed underlying assumptions for their use. For the PC support of risk management is presenting the outputs from the software, which includes several probability distribution of the above groups.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

rozdelenie pravdepodobnosti, zložené rozdelenia pravdepodobnosti, zmiešané rozdelenia pravdepodobnosti, aktuárske modelovanie, Solvency II, aktuársky softvér

KEY WORDS

probability distribution, compound distribution, mixed distribution, actuarial modeling, Solvency II, actuarial software

1. ÚVOD

Článok pozostáva zo siedmich samostatných kapitol. Prvá kapitola stručne na úvod predstavuje základné skupiny rozdelení pravdepodobnosti používaných v aktuárskom modelovaní rizika. Na základe tohto členenia každá z ďalších šiestich kapitol opisuje základné aspekty a predpoklady danej skupiny rozdelení pravdepodobnosti. Informácie sú doplnené výstupmi z vybraného aktuárskeho softvéru.

2. PRAVDEPODOBNOSTNÉ ROZDELENIA V POISŤOVNÍCTVE

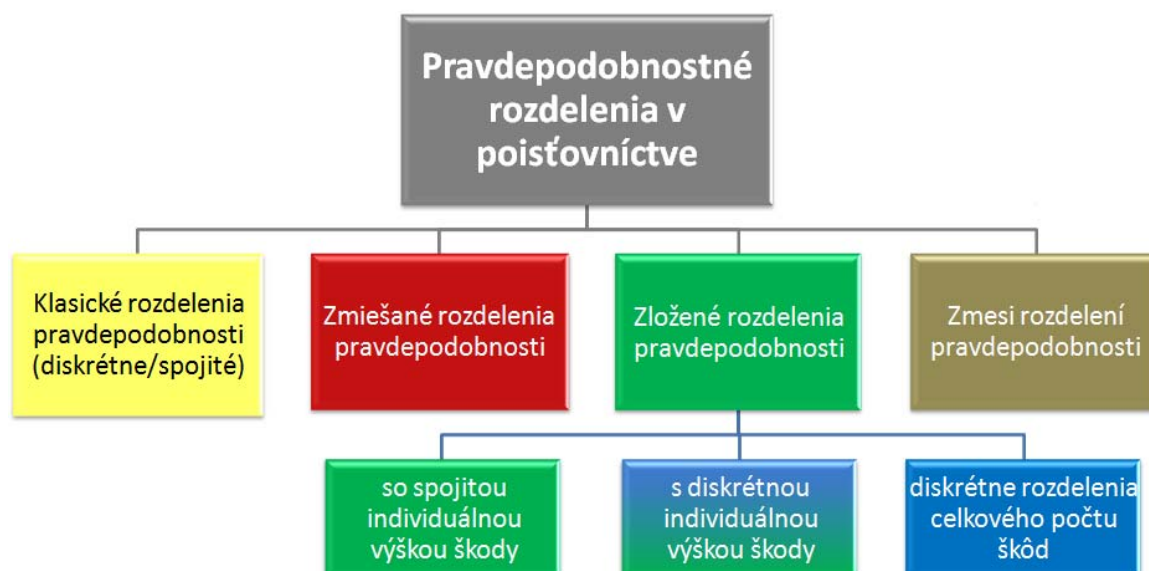
Na základe znalostí pravdepodobnostných zákonitostí a s využitím matematického modelovania majú poisťovne možnosť rozlišovať a posudzovať riziko tak, že straty spojené s poistnými udalosťami sú relatívne nižšie. Aktuár preto

potrebuje pri svojej činnosti poznať pravdepodobnostné rozdelenia, ktoré sú vhodné na modelovanie počtu a individuálnej výšky škôd pri rôznych typoch poistenia, resp. zaistenia.

V súvislosti s modelovaním počtu a výšky individuálnej škody je dôležité poznať zákonitosti jednotlivých diskretných a spojitých rozdelení, ich parametre a charakteristiky, ktoré sa najviac používajú v poistnej praxi. Klasické rozdelenia pravdepodobnosti rozšírime o menej používané rozdelenia vrátane zložených diskretných rozdelení a zmiešané rozdelenia. Úlohou aktuárskych analýz je často zistiť vhodné rozdelenie počtu škôd a výšky škôd, ktorým sa poisťovňa bude riadiť.

Pri hľadaní vhodného modelu výšky škôd má zásadný význam využitie výpočtovej techniky. Znalosť rozdelenia pravdepodobnosti týchto náhodných premenných je základom riešenia mnohých problémov v poisťovníctve súvisiacich s riadením poistno-technického rizika. Pri ich aplikácii v poistnej praxi je rozhodujúci odhad parametrov týchto rozdelení a testovanie zhody empirických rozdelení s predpokladaným teoretickým pravdepodobnostným modelom.

Obrázok č. 1: Pravdepodobnostné rozdelenia v poisťovníctve



Zdroj údajov: PÁLEŠ, M.: Rekurentné vzťahy pre aktuárov a ich aplikácia v oblasti zaistenia: dizertačná práca. Bratislava: EU v Bratislave, 2012, s. 20

Obrázok č. 1 zobrazuje schému členenia pravdepodobnostných rozdelení, ktoré možno využiť pri aktuárskom modelovaní. Pri týchto analýzach môžeme použiť softvér VOSE ModelRisk. Z hľadiska matematicko-štatistických analýz možno vyzdvihnúť práve viac ako 90 modifikovaných rozdelení pravdepodobnosti, simulácie Monte Carlo, korelačnú analýzu, komplexné štatistické správy, analýzu citlivosti, metódy scenárov, optimalizácie, časové rady, testy dobrej zhody, Markovove reťazce, bootstrap metódy, úplné nástroje na riadenie rizika, metódu Six Sigma, diferenciálne rovnice, numerické integrovanie, testovanie kvality. Softvér VOSE ModelRisk 4 má uvedené samostatné vlastné skupiny rozdelení pravdepodobnosti vhodných na modelovanie rizika vo svojich zabudovaných procedúrach. Rovnako obsahuje procedúru na testy dobrej zhody, na základe ktorých možno overiť predpoklad zhody skúmaných údajov s príslušným teoretickým rozdelením.

3. DISKRÉTNÉ ROZDELENIA PRAVDEPODOBNOSTI

Reálne podmienky, ktoré pri rôznych druhoch poistenia vedú k vzniku poistnej udalosti, spôsobujú, že počet škôd opísaných náhodnou premennou označenou N má najčastejšie niektoré z týchto diskretných rozdelení pravdepodobnosti – alternatívne, geometrické, binomické, Poissonovo a negatívne binomické rozdelenie.

Základným orientačným kritériom pri výbere vhodného diskretného rozdelenia počtu škôd je vzťah medzi strednou hodnotou a rozptylom tejto náhodnej premennej. Vzhľadom na to, že na základe známych údajov poisťovne o počte škôd často možno odhadnúť charakteristiky – strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej N , je možné určiť základné rozdelenie opisujúce počet škôd.

Obrázok č. 2: Rozdelenia počtu škôd



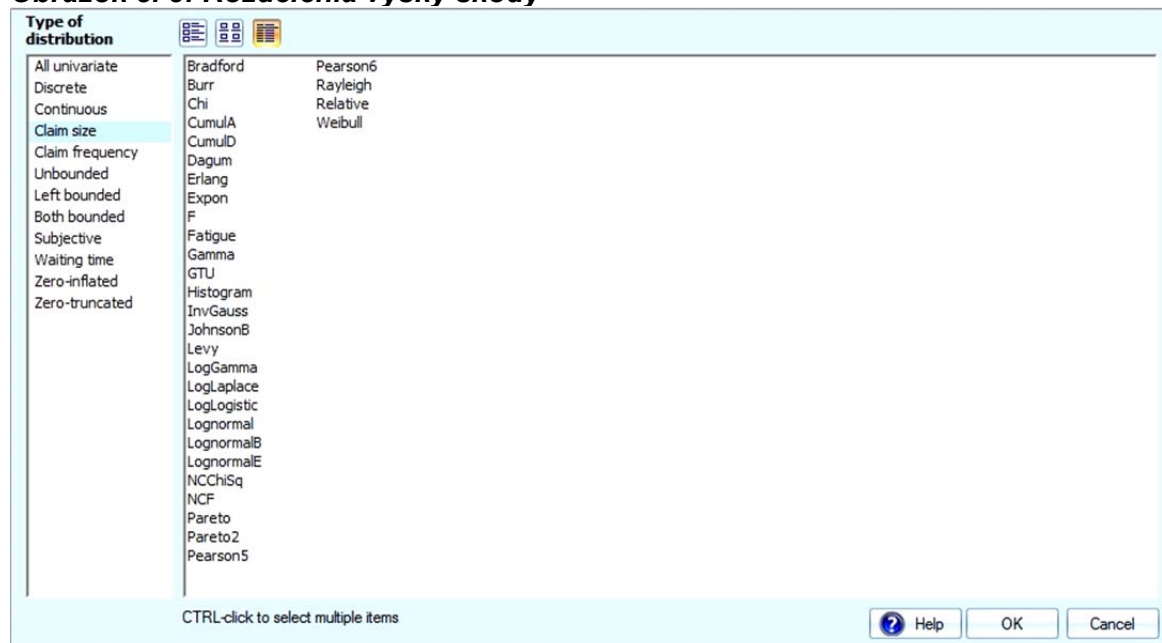
Zdroj údajov: Vose ModelRisk 4.0

Obrázok č. 2 predstavuje kontextové menu ponuky rozdelení (*Type of distribution*) na počet škôd (*Claim frequency*) softvéru VOSE ModelRisk 4, ktorý obsahuje okrem známych diskretných rozdelení aj modely škôd opísané useknutými rozdeleniami opísanými napríklad v [3].

4. SPOJITÉ ROZDELENIA PRAVDEPODOBNOSTI

Pri analýze rizika, ktoré na seba poisťovňa preberá, je nemenej dôležité poznať aj pravdepodobnostné rozdelenie individuálnej výšky škody, t. j. poznať, akým rozdelením a s akými parametrami možno opísať výšku škody. Hodnoty individuálnej výšky škody (náhodná premenná X) pri viacerých typoch najmä neživotného poistenia majú niektoré spoločné vlastnosti. Väčšina z nich nadobúda hodnoty nižšie ako priemerná výška škody, pričom sú však pravdepodobné aj extrémne vysoké výšky škôd, čo spôsobuje veľký rozptyl a vo všeobecnosti pravostrannú asymetriu týchto rozdelení. Tieto vlastnosti vedú k predpokladu, že ako rozdelenia pravdepodobnosti individuálnej výšky škody (*Claim size*) môžu slúžiť niektoré z pravostranne (pozitívne) zošikmených spojitých rozdelení.

Obrázok č. 3 predstavuje kontextové menu ponuky rozdelení opisujúcich výšku škody, ktorú ponúka softvér VOSE ModelRisk 4.

Obrázok č. 3: Rozdelenia výšky škody

Zdroj údajov: Vose ModelRisk 4.0

5. ZLOŽENÉ DISKRÉTNÉ ROZDELENIA

Jednou z tried rozdelení, ktoré opisujú rozdelenia počtu škôd a ktorých základom je Poissonovo, binomické a negatívne binomické rozdelenie, sú zložené diskrétne rozdelenia. Sú to dvoj-, resp. trojparametrické rozdelenia, ktoré vlastne umožňujú lepšie ohodnotiť zošikmenie rozdelenia počtu škôd a pri fixnej strednej hodnote a disperzii chvosty týchto rozdelení môžu opísať čo najpresnejšie.

Ak N reprezentuje počet rôznych druhov náhodných udalostí v danom portfóliu rizík a náhodné premenné M_1, M_2, \dots opisujú, koľkokrát príslušný druh poistnej udalosti nastane (napr. zranenie, počet havárií, počet krádeží...), potom náhodná premenná označená IN opisuje celkový počet poistných udalostí, ktoré v skúmanom portfóliu nastanú, pričom náhodná premenná N je primárne rozdelenie a M je sekundárne rozdelenie. Náhodná premenná IN má zložené diskrétne rozdelenie s pravdepodobnostnou vytvárajúcou funkciou $P_{IN}(t)$ a náhodné premenné $M_i, i = 1, 2, \dots, N$, ktoré sú nezávislé a identicky rozdelené, s pravdepodobnostnou vytvárajúcou funkciou $P_M(t)$ predstavujú počet nárokov jednotlivých poistných udalostí. Potom pre výslednú náhodnú premennú IN platí

$$IN = M_1 + M_2 + \dots + M_N$$

Takto interpretované rozdelenie, presnejšie modelujúce počet celkových škôd, možno využiť aj v iných vhodných situáciách, pričom uvedená interpretácia nie je nevyhnutná a vzťah uvedený vyššie možno využiť vždy, keď údaje samy zdôvodňujú jeho zmysel. Široká trieda rozdelení je teda vytvorená postupmi skladania ľubovoľných dvoch diskrétnych rozdelení. Strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej IN vyjadríme podľa [3] ako

$$E(IN) = E(N) \cdot E(M)$$

$$D(IN) = E(N) \cdot D(M) + E^2(M) \cdot D(N)$$

Tieto rozdelenia napríklad nie sú súčasťou softvéru VOSE ModelRisk 4.

6. ZMESI ROZDELENÍ

Ak $F_{N_1}(x), F_{N_2}(x), \dots, F_{N_n}(x)$ sú distribučné funkcie náhodných premenných N_1, N_2, \dots, N_n a p_1, p_2, \dots, p_n sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

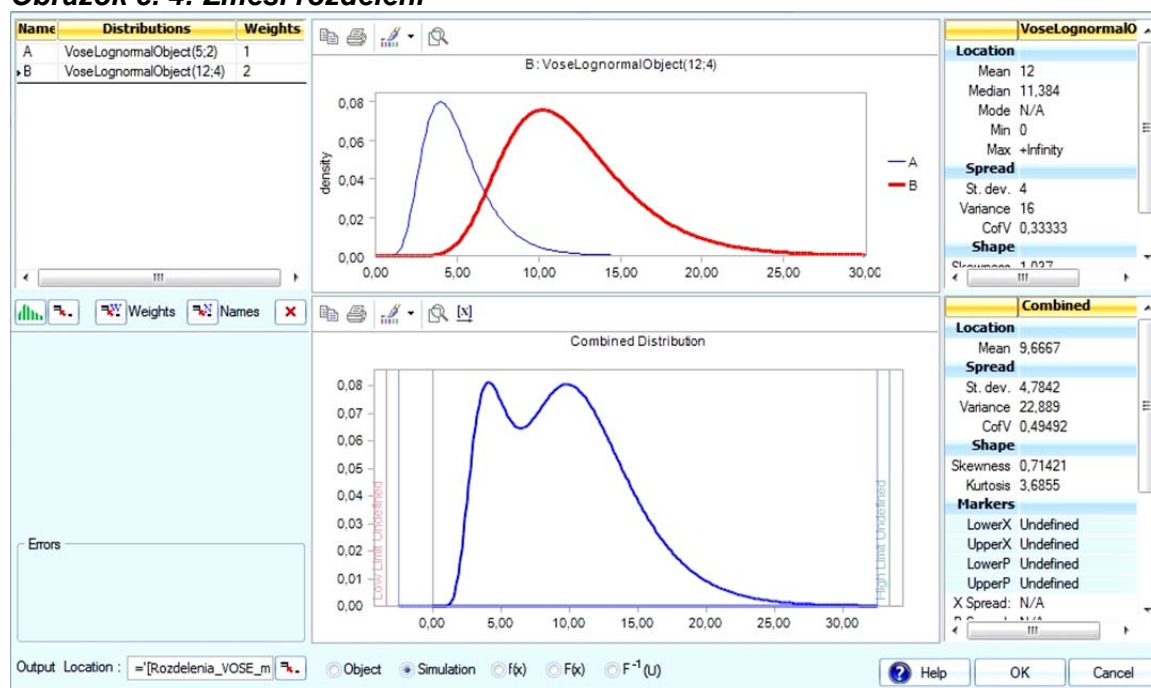
tak

$$F_N(x) = p_1 \times F_{N_1}(x) + p_2 \times F_{N_2}(x) + \dots + p_n \times F_{N_n}(x)$$

definuje rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej N , ktoré sa nazýva konečnou zmesou rozdelení premenných s váhami

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

Obrázok č. 4: Zmesi rozdelení



Zdroj údajov: Vose ModelRisk 4.0

Obrázok č. 4 znázorňuje výpočet charakteristík a grafické zobrazenie hustoty pravdepodobnosti zmesi dvoch rozdelení označených

$$A \sim \text{LN}(5;2)_1, B \sim \text{LN}(12;4)_2$$

Ide o lognormálne rozdelenie s príslušnými váhami vyjadrenými ako zmes rozdelení (*Combined distribution*) pravdepodobnosti pomocou softvéru VOSE ModelRisk 4.

Priamo v teórii rizika nájdeme uplatnenie konečných zmesí rozdelení v prípade, ak pracujeme s heterogénnym portfóliom poisťných zmlúv a počty škôd pripadajúce k nim nemajú identický zákon rozdelení. Presnejšie formulované portfólio poisťných zmlúv je rozložené na subportfóliá, pričom náhodné premenné opisujúce počet škôd v týchto triedach majú identický zákon rozdelenia. Formálne teda môžeme upraviť

portfólio n poistných zmlúv na n čiastkových tried, z ktorých každá má rozdelenie $p_{N_i}, i = 1, 2, \dots, n$.

7. ZMIEŠANÉ ROZDELENIA

Zmiešané rozdelenia (angl. mixed distribution) sú rozdelenia, ktorých parameter je náhodná premenná, ktorá sa riadi nejakým ďalším typom rozdelenia. Sú to najmä rozdelenia pravdepodobnosti počtu škôd v heterogénnych portfóliách poistných zmlúv.

Ak rozdelenie náhodnej premennej N je definované pravdepodobnostnou funkciou $p_N(n, \Theta)$, pričom parameter Θ je náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti $f_\Theta(\theta)$ a podmienené rozdelenie náhodnej premennej N má pravdepodobnostnú funkciu $p_{N/\Theta}(n/\theta)$, potom pre rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej N platí

$$P(N = n) = p_N(n, \Theta) = \int_{\Theta} p_{N/\Theta}(n/\theta) \cdot f_\Theta(\theta) d\theta$$

Napríklad pri vstupe nového poistenca do poistného procesu nie je najskôr známe, do ktorej triedy patrí. Príslušnosť k triede môžeme modelovať náhodnou premennou Θ , ktorá priamo určí skupinu, do ktorej poistenec patrí. Táto náhodná premenná nadobúda hodnoty $i = 1, 2, \dots, n$ s pravdepodobnosťami a priori $p_{Q(i)} = P(Q = i)$, pričom

$$p_{Q(i)} = \frac{\text{počet poistencov v } i\text{-tej triede}}{\text{počet poistencov v portfóliu}}$$

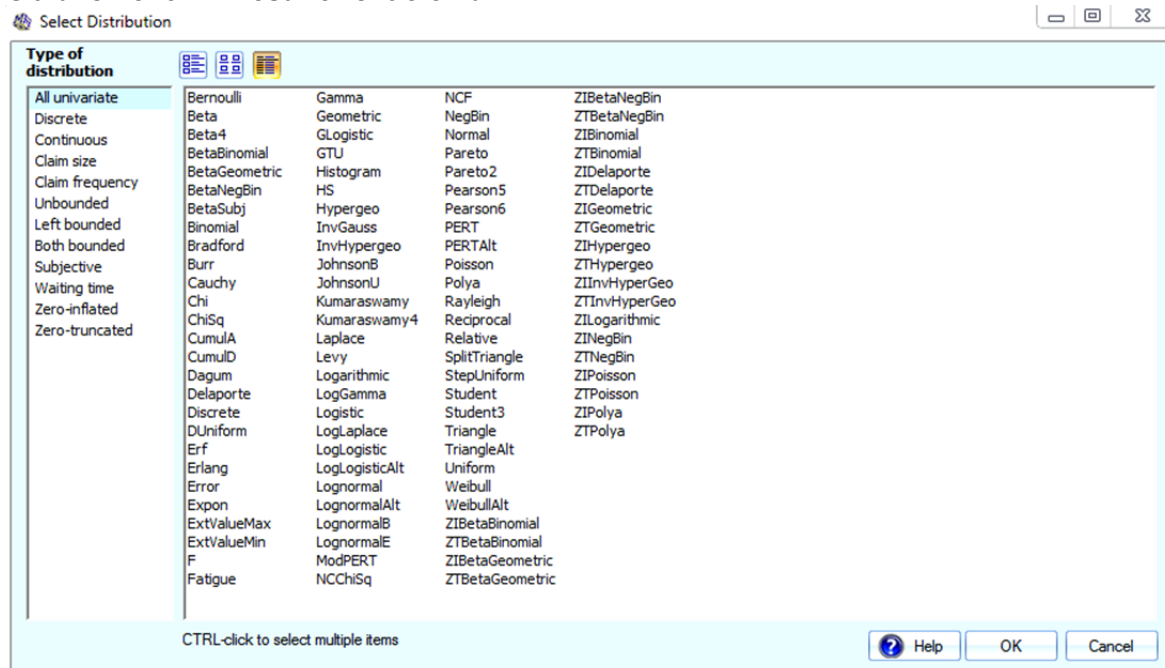
Rozdelenie počtu škôd za celé portfólio je novou náhodnou premennou, ktorú môžeme nazvať zmiešaným rozdelením, pre ktoré platí

$$p_N(x) = P(N = x) = \sum_{i=1}^n P(N = x / \Theta = i) \cdot P(\Theta = i) = \sum_{i=1}^n p_{N_i}(x) \cdot p_{\Theta}(i), \quad n \in N_0$$

je teda konečnou zmesou rozdelení $p_{N_i} = p_{N/Q=i}$ s váhami $p_{Q_i}, i = 1, 2, \dots, n$. Dôležitá vlastnosť na ohodnotenie parametrov rozdelení je zvláštna identifikácia mena, ktorá opisuje, do akej miery je zmes s komponentmi $F_{N_1}(x), F_{N_2}(x), \dots, F_{N_n}(x)$, resp. $p_{N_1}(x), p_{N_2}(x), \dots, p_{N_n}(x)$, a váhami p_1, p_2, \dots, p_n jednoznačne určená.

Vo všeobecnosti pre spojité rozdelenia identifikácia názvu nie je daná. Výnimkou je napríklad zmes binomického rozdelenia a rozdelenia beta, Poissonovho rozdelenia s rozdelením gama, negatívne binomického rozdelenia s beta rozdelením.

Teda vo všeobecnosti zmiešané rozdelenie náhodnej premennej N je rozdelenie vyjadrené pravdepodobnostnou funkciou $p_N(n, \Theta)$ s neznámym parametrom. Podľa [1] Bayesovská teória je založená na predpoklade, že náhodná premenná Θ sa riadi rozdelením s pravdepodobnostnou funkciou p_Θ , ktoré sa nazýva apriórne rozdelenie, lebo je známe ešte pred zisťovaním hodnôt náhodnej premennej N . Na základe výberového zisťovania hodnôt náhodnej premennej $n, n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ určíme aposteriórne rozdelenie $p_{N/\Theta}$, pričom rozdelenie Θ sa nazýva zmiešané rozdelenie.

Obrázok č. 5: Zmiešané rozdelenia

Zdroj údajov: Vose ModelRisk 4.0

Rozdelenia (*BetaBinomial*, *BetaGeometric*, *Delaporte*, *Polya*) na obrázku č. 5 sú zmiešanými rozdeleniami z ponuky možných rozdelení (*All univariate*), pričom jednotlivé názvy a širší opis zmiešaných rozdelení sú uvedené napríklad v [3].

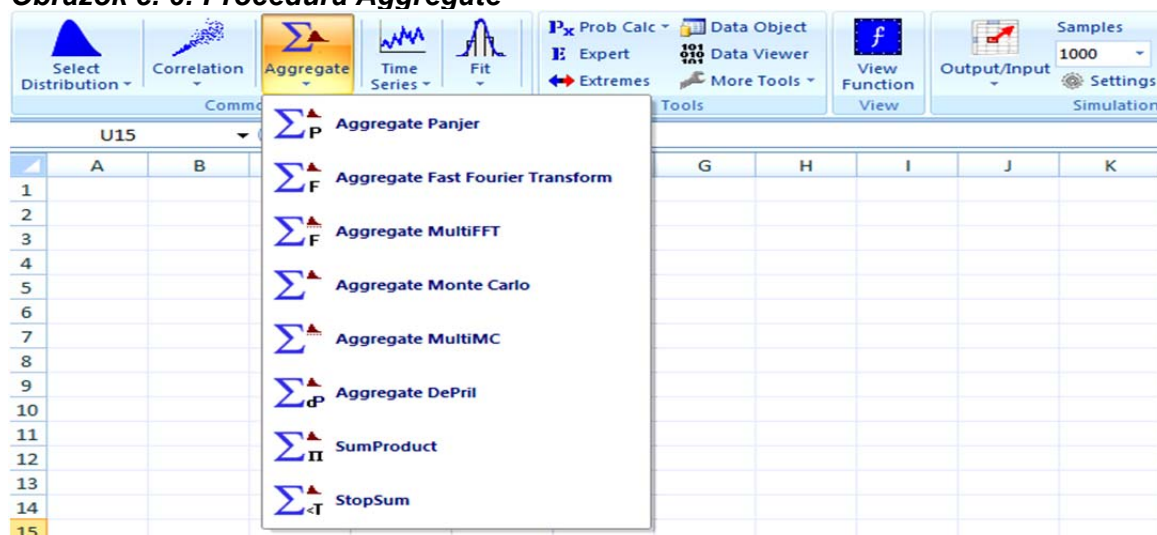
8. ZLOŽENÉ ROZDELENIA

Zložené rozdelenie pravdepodobnosti definujeme na základe predpokladov kolektívneho modelu rizika. Základom na zodpovedanie otázok poisťovateľa týkajúcich sa poistného, zaistenia, teórie krachu, výpočtov hodnôt pravdepodobnej funkcie pomocou rekurentných vzťahov a pod. je poznanie základných charakteristík a rozdelenia pravdepodobnosti celkovej škody S . Na vysvetlenie teda použijeme model, ktorý je opísaný pomocou troch základných náhodných premenných, a to podľa [1]:

- náhodnej premennej počtu škôd N ,
- náhodnej premennej individuálnej výšky škody X ,
- náhodnej premennej opisujúcej celkovú škodu v konkrétnom portfóliu poistných zmlúv S .

Ak náhodná premenná N opisuje počet škôd, ktoré v sledovanom období vzniknú, a náhodná premenná X_i opisuje výšku i -tej škody, pričom $X_i > 0$, potom celkovú škodu S , ktorá je generovaná náhodnou premennou N , vyjadríme ako súčet všetkých individuálnych škôd, a to vzťahom

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

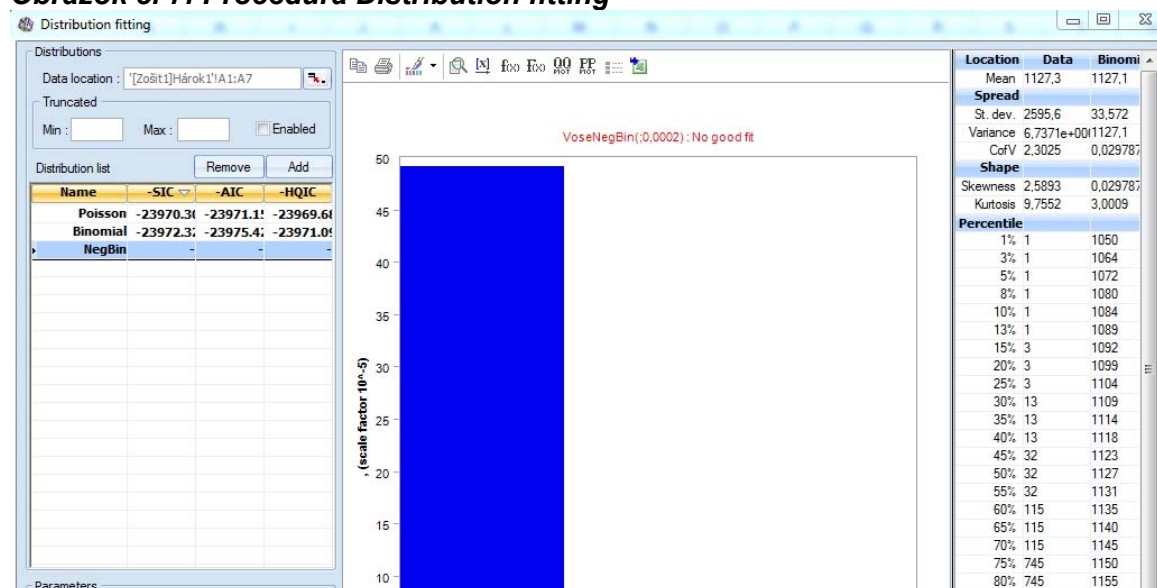
Obrázok č. 6: Procedúra Aggregate

Zdroj údajov: Vose ModelRisk 4.0

Obrázok č. 6 zobrazuje procedúry, ktoré ponúka softvér VOSE *ModelRisk 4* na kalkuláciu celkovej škody (*Aggregate*). Podrobne sa modelovaním rizika v neživotnom poistení pomocou zložených rozdelení zaoberá článok autora [4].

9. TESTY DOBREJ ZHODY

Softvér VOSE *ModelRisk 4*, ako sme uviedli na začiatku, poskytuje dôležitú procedúru pri testovaní dát so zvoleným teoretickým rozdelením pravdepodobnosti so známymi parametrami. Obrázok č. 7 opisuje testy dobrej zhody a odhad parametrov metódou maximálnej vierohodnosti pre vybrané rozdelenia pravdepodobnosti (Poissonove, binomické, negatívne binomické), pre údaje o počte škôd. Na ukážke (výrez) vidíme, že napr. pre skúmané údaje nie je negatívne binomické rozdelenie vhodným modelom [3].

Obrázok č. 7: Procedúra Distribution fitting

Zdroj údajov: Vose ModelRisk 4.0

10. ZÁVER

Riadenie rizika v poisťovniach sa stáva neodmysliteľnou súčasťou práce aktúarov tak pre oddelenia neživotného, ako aj životného poistenia. Táto činnosť je ešte umocnená prostredníctvom projektu Solvency II – direktívou Európskej únie (Európskej komisie), kvantitatívnymi štúdiami QIS 5 a samotnou koncepciou ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). Príprava poisťovní na implementáciu projektu Solvency II je zložitý proces jednak z vecného, jednak z časového hľadiska. V rámci tvorby interných modelov by mal aktúar, resp. osoba zodpovedná za ich tvorbu v poisťovni ovládať na zodpovedajúcej úrovni okrem iného aj metódy teórie rizika, teórie pravdepodobnosti a ďalších kvantitatívnych vied. Predpokladom sú rozsiahle teoretické znalosti a zvolenie vhodných postupov riešenia na analýzu konkrétneho rizika, čo umožňuje správne pochopenie, interpretáciu získaných výsledkov a ich využitie pri správnom rozhodovaní o následných opatreniach v rámci poisťovne. Jedným z týchto predpokladov je podrobne poznať známe aj menej známe rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré možno využiť pri analýze rizika.

LITERATÚRA

- [1] HORÁKOVÁ, G., MUCHA, V. 2008. *Teória rizika v poistení II. časť*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008. ISBN 978-80-225-2549-7.
- [2] KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H., WILLMOT, G. E. 2009. *LossModels (From Data to Decision)*. New York: JohnWiley&Sons, 2009. ISBN 978-0470487440.
- [3] PÁLEŠ, M. 2012. *Rekurentné vzťahy pre aktúarov a ich aplikácia v oblasti zaistenia*: dizertačná práca. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, 2012.
- [4] PÁLEŠ, M., POLÁČEK, Š. 2012. *Softvérová podpora pri modelovaní rozdelenia celkovej škody v havarijnom poistení*. In: Slovenská štatistika a demografia: vedecký časopis = Slovak Statistics and Demography: scientific journal. Bratislava: Štatistický úrad Slovenskej republiky, 2012. ISSN 1210-1095. Roč. 22, č. 3 (2012), s. 50 – 58.
- [5] POLÁČEK, Š., PÁLEŠ, M. 2012. *Durácia ako nástroj na riadenie rizika zmeny úrokovej miery v poisťovniach*. In: Managing and modelling of financial risks [elektronický zdroj]: 6th international scientific conference. Ostrava: VŠB - TU Ostrava, 2012. ISBN 978-80-248-2835-0.
- [6] <http://www.vosesoftware.com/>

RESUMÉ

Úlohy aktúara po implementácii projektu Solvency II sa výrazne rozšíria a môžeme predpokladať, že naplňovať kvantitatívne požiadavky tohto projektu v začiatkoch nebude jednoduché. Významným indikátorom sa stane zostavovanie relevantných interných modelov (napríklad podľa požiadaviek ORSA), na ktorých tvorbu bude aktúar potrebovať obsiahnuť náplň rôznych odborných disciplín. V príspevku sa zameriavame na rozčlenenie pravdepodobnostných rozdelení na analýzu rizika v poistení s uvedením základných predpokladov ich použitia.

RESUME

Tasks actuary following the implementation of Solvency II will significantly expand and we can assume that the followed quantitative requirements of the project in the beginning will not be easy. An important indicator becomes a compilation of relevant

internal models (for example, according to ORSA, the creation of which the actuary will need a cover charge of various professional disciplines. This paper focuses on the division of probability distributions for risk analysis in insurance, under basic conditions for their use.

PROFESIJNÝ ŽIVOTOPIS:

Ing. Michal Páleš, PhD., v roku 2012 ukončil doktorandské štúdium na Katedre matematiky a aktuárstva FHI EU v Bratislave, študijný program kvantitatívne metódy v ekonómii. Od toho istého roka je tajomníkom Katedry matematiky a aktuárstva FHI EU v Bratislave. V rámci pedagogickej činnosti vyučuje cvičenia k predmetom matematika, teória pravdepodobnosti a teória rizika v poistení. Vo svojej vedeckej práci sa orientuje na využitie matematicko-štatistických metód v ekonómii a teórii rizika v neživotnom poistení (Panjerove rekurentné vzťahy, rozdelenia pravdepodobnosti využívané v aktuárskej praxi, softvérová podpora riadenia rizík).

KONTAKT:

pales.euba@gmail.com