

SLOVENSKÁ ŠTATISTIKA a DEMOGRAFIA

SLOVAK STATISTICS
and DEMOGRAPHY

3/2020

ročník/volume 30

Recenzovaný vedecký časopis so zameraním na prezentáciu moderných štatistických a demografických metód a postupov.

Scientific peer-reviewed journal focusing on the presentation of modern statistical and demographic methods and procedures.

Článok/Article: 5

Typ článku/Type of article: vedecký článok/scientific article

Strany/Pages: 75 – 86

Dátum vydania/Publication date: 15. júl 2020/July 15, 2020



Tatiana ŠOLTÉSOVÁ

Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave

Jana KÚTIKOVÁ

Katedra štatistiky, Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave

VYUŽITIE REGRESNEJ ANALÝZY PRI MODELOVANÍ ÚMRTNOSTI V ŽIVOTNOM POISTENÍ

THE USE OF REGRESSION ANALYSIS IN MODELING OF MORTALITY IN LIFE INSURANCE

ABSTRAKT

Cieľom príspevku je predstaviť a aplikovať vybrané parametrické modely úmrtnosti na modelovanie úmrtnosti žien a mužov na Slovensku v roku 2018. Vybrané modely úmrtnosti sú analyzované ako regresné modely, ktoré zahŕňajú regresnú funkciu a náhodnú zložku. Na modely úmrtnosti teda nazeráme ako na štatistické (stochastické) modely, pre ktoré na základe empirických údajov o pravdepodobnosti úmrtia v rôznom veku osôb (osobitne mužov a žien) je potrebné odhadnúť parametre regresnej funkcie. Parametre vybraných modelov úmrtnosti budeme odhadovať iteračnými metódami nelineárnej regresnej analýzy v softvéri SAS, resp. prostredníctvom jeho aplikácie SAS Enterprise Guide.

ABSTRACT

The aim of the paper is to introduce and apply the selected parametric mortality models to modelling of male and female mortality in Slovakia in 2018. The selected mortality models are analysed as regression models including regression function and a random component. We are looking at mortality models as statistical (stochastic) models for which it is necessary to estimate the parameters of regression function based on empirical data of age specific mortality rates (separately for men and women). The parameters of selected mortality models will be estimated by iterative methods of nonlinear regression analysis in the SAS software, through its application SAS Enterprise Guide.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

úmrtnosť, úmrtnostné tabuľky, parametrický model úmrtnosti, iteračná metóda, regresná analýza

KEY WORDS

mortality, life tables, parametric model of mortality, iterative method, regression analysis

1. ÚVOD

Všetky zmeny prebiehajúce v spoločnosti, teda aj demografické, sa priamo odrážajú v poisťovacích činnostiach. Z demografických ukazovateľov je pre životné poistenie dôležité sledovať v rámci populácie hlavne úmrtnosť. V súčasnosti, keď v celej Európe už niekoľko desiatok rokov prebieha starnutie populácie, je problematika sledovania vplyvu očakávanej dĺžky života populácie na dôchodkový systém často diskutovanou témou.

Nepriaznivý demografický vývoj, ktorý zasahuje aj Slovensko, je charakterizovaný nízkou pôrodnosťou a predlžovaním strednej dĺžky života. Tieto dva demografické javy (pôrodnosť a úmrtnosť), ktoré významne menia štruktúru populácie, majú v súčasnosti za následok starnutie populácie. Hlavnými príčinami starnutia populácie je teda znižovanie úmrtnosti (zlepšujúce sa životné podmienky a zdravotná starostlivosť), pokles pôrodnosti a v niektorých regiónoch je to aj emigrácia obyvateľstva v produktívnom, resp. reprodukčnom veku.

Priemerná dĺžka života za posledné desaťročia výrazne vzrástla a stále sa mení, čoho dôsledkom je dlhšia doba vyplácania predovšetkým doživotných poistných dôchodkov (napríklad z nasporenej sumy v II. pilieri pri odchode do dôchodku) ako aj ich zvýšená očakávaná súčasná hodnota. Oceňovanie produktov životného poistenia prebieha na základe súčasných očakávaní o budúcom vývoji úmrtnosti. Zmenou očakávanej úmrtnosti sa poisťovne vystavujú riziku, že ich záväzky z poistných produktov môžu výrazne prekročiť očakávanú hodnotu. Toto riziko vzniká pri poklese úmrtnosti v prípade dôchodkových produktov alebo pri zvýšení úmrtnosti v prípade produktov kryjúcich riziko smrti, a preto problematika vekového modelovania a analýzy úmrtnosti je a vždy bude dôležitou súčasťou práce v aktuárskej praxi.

2. PARAMETRICKÉ MODELY ÚMRTNOSTI

Hlavným parametrom modelov slúžiacich na stanovenie primeraného kapitálu na krytie rizík v životnom poistení je *ročná miera úmrtnosti*, ktorá predstavuje istú štatisticky stanovenú pravdepodobnosť úmrtia osoby vo veku x , resp. pravdepodobnosť, že osoba vo veku x sa nedožije nasledujúceho roka [16]. Ide o stochastický parameter, ktorého odchýlky a výkyvy môžu mať výrazný dosah na záväzky poisťovne, a tým aj na jej solventnosť. Tieto odchýlky a celkový vývoj miery úmrtnosti si vyžadujú neustálu pozornosť, pretože je od nich závislá finančná výkonnosť a stabilita poisťovní.

Údaje o vekovej úmrtnosti populácie potrebné na výpočty v životnom poistení sú uvedené v úmrtnostných tabuľkách, ktoré si môže poisťovňa vytvárať sama na základe svojich skúseností o úmrtnosti vo svojom poistnom portfóliu alebo môže použiť informácie o úmrtnostnom správaní populácie v danej krajine. Tieto informácie sa nachádzajú na webovej stránke Štatistického úradu Slovenskej republiky (ďalej „ŠÚ SR“) v časti s názvom Tabuľky života [18] a sú členené nielen podľa pohlavia, ale aj podľa regionálneho členenia (kraje, okresy, mestá a iné obce).

Zákony úmrtnosti, resp. parametrické modely úmrtnosti patria k deterministickým modelom. Predpokladáme pri nich, že hodnoty (napr. vekové miery úmrtnosti, intenzity úmrtnosti) pozorované v danom roku môžu byť preložené nejakým trendom, teda pomocou nejakej matematickej funkcie a môžeme tak predpokladať, že tento trend bude pokračovať aj v najbližších rokoch. Parametrické modely úmrtnosti sú použiteľné v populačných projekciách vďaka analýze historických trendov vývoja uvažovaných parametrov modelov. Napríklad v publikácii z roku 1979 sa v analýze historických zmien vývoja úmrtnosti švédskych mužov ukázalo, že v Gompertzovom-Makehamovom modeli úmrtnosti vykazovala zložka, ktorá je závislá od veku, historickú stabilitu, a to aj napriek rýchlemu poklesu zložky, ktorá je od veku nezávislá. Ďalšie analýzy v publikácii [4] potvrdili platnosť tohto javu a aj výskum historických časových radov zostavených

z údajov o úmrtnosti v 17 krajinách potvrdil tieto závery. Podľa Gavrilovovej a Gavrilova (2011) predstavujú parametrické modely úmrtnosti užitočný nástroj v demografických i aktuárskych prognózach úmrtnosti.

V príspevku odhadneme parametre nelineárnych funkcií parametrických zákonov úmrtnosti [1], ktorých predpis je určený:

- Heligmanovým-Pollardovým modelom,
- Kannistovým modelom,
- Coaleovým-Kiskerovým modelom.

Vybrané modely sme zvolili preto, lebo patria k najrozšírenejším a najviac používaným zákonom úmrtnosti, sú vhodné pre vyššie veku [11, 12], majú rôzny počet odhadovaných parametrov (od 2 do 8 parametrov) a sú to rôzne typy matematických funkcií.

Heligmanov-Pollardov model

Heligman a Pollard navrhli v roku 1980 niekoľko parametrických modelov úmrtnosti, ktoré sú schopné modelovať trend úmrtnostného správania ľudskej populácie pre všetky vekové kategórie a majú biologickú interpretáciu. Práve z tohto dôvodu patria k najrozšírenejším a najviac používaným zákonom úmrtnosti v demografii.

V našej aplikácii využijeme tzv. druhý tvar Heligmanovho-Pollardovho zákona úmrtnosti, ktorý opisuje mieru úmrtnosti, tzn. pravdepodobnosť, že x ročná osoba zomrie v priebehu roka. Druhý tvar tohto zákona vyjadruje mieru úmrtnosti takto:

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1+GH^x} \quad (1)$$

Heligman a Pollard zistili, že pre vyššie veku (v našom prípade 50 až 105 rokov) je vhodné použiť len tretí (logistický) člen modelu (1), ktorý vychádza z Gompertzovho zákona úmrtnosti. Teda pre mieru úmrtnosti q_x platí vzťah:

$$q_x = \frac{GH^x}{1+GH^x} \quad (2)$$

ktorý prepíšeme pomocou parametrov a , b do tvaru:

$$q_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}} \quad (3)$$

Uvedený vzťah sme použili aj v aplikácii, čiže odhadovali sme dva parametre a , b Heligmanovho-Pollardovho modelu.

Kannistov model

Kannistov model (1994) patrí do skupiny logistických modelov [7], ktoré sú v poslednom čase čoraz viac populárne pri projekcii úmrtnosti. Tento model na rozdiel od predchádzajúceho modelu opisuje intenzitu úmrtnosti x -ročnej osoby μ_x . Ide o dôležitý

pojem v aktuárskej matematike súvisiaci s modelovaním budúcej dĺžky života osoby. Platí, že čím je hodnota μ_x väčšia, tým väčšia je pravdepodobnosť, že osoba vo veku x zomrie v krátkom časovom intervale. Intenzitu úmrtnosti môžeme opísať aj ako „rýchlosť vymierania“. V monografii [16] sú uvedené rôzne vzťahy jej vyjadrenia. Kannistov model vyjadruje intenzitu úmrtnosti v závislosti od dvoch parametrov a , b takto:

$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}} \quad (4)$$

Aby sme mohli modelovať úmrtnosť z údajov ŠÚ SR, kde sú uvedené miery úmrtnosti, vyjadríme z aproximácie $\mu_x \sim -\ln(1 - q_x)$, ktorá platí pre vyššie vekové kategórie [11] mieru úmrtnosti q_x a dostaneme vzťah s parametrami a , b :

$$q_x = 1 - e^{-\frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}} \quad (5)$$

Coaleov-Kiskerov model

Coaleho-Kiskerov model (1990) bol alternatívou Gompertzovho-Makehamovho zákona úmrtnosti, ktorý zdôrazňoval zmenu miery úmrtnosti v dvoch po sebe idúcich rokoch a uvažoval so „spomalením“ úmrtnosti vo vysokom veku. Aplikáciu uskutočníme použitím nasledujúceho tvaru Coaleovho-Kiskerovho úmrtnostného modelu s tromi parametrami a , b , c , pre ktorý platí:

$$q_x = e^{ax^2 + bx + c} \quad (6)$$

Jeho prednosťou je predovšetkým vyššia flexibilita, ako aj numerická ustálenosť pri odhade parametrov.

3. ITERAČNÉ METÓDY ODHADU PARAMETROV NELINEÁRNYCH REGRESNÝCH MODELOV

V 2 kapitole sme opísali parametrické modely úmrtnosti, tzv. zákony úmrtnosti. Keďže zákony úmrtnosti sú vyjadrené nelineárnymi funkciami, ktoré obyčajne nie sú linearizovateľné (nedajú sa jednoduchými matematickými transformáciami previesť do lineárneho tvaru), na odhad parametrov týchto funkcií využívame nelineárnu regresnú analýzu. Nelineárna regresná analýza na rozdiel od lineárnej regresnej analýzy nevyužíva metódu najmenších štvorcov, ale iteračné metódy.

Opíšeme tri iteračné metódy používané na odhad parametrov nelineárnych regresných modelov. Patria k nim:

- Gaussova-Newtonova metóda,
- gradientná metóda,
- Levenbergova-Marquardtova metóda.

Metódy aplikujeme v softvéri SAS Enterprise Guide. V SAS Enterprise Guide sú v ponuke len niektoré nelineárne funkcie, preto sme museli urobiť zásah do

programovacieho kódu, kde sme požadované nelineárne funkcie zapísali v rámci procedúry nelineárnej regresie (*PROC NLIN*) v príkaze *MODEL*. Zároveň bolo potrebné zadefinovať parametre funkcie a zadať vstupné odhady parametrov, čo sme realizovali vďaka príkazu *PARMS*. Naším cieľom bolo porovnať aj výsledky jednotlivých iteračných metód, a preto sme nevyužili len štandardne nastavenú Gaussovú-Newtonovu metódu, ale prostredníctvom príkazu *METHOD* sme aplikovali aj gradientnú metódu a Levenbergovu-Marquardtovu metódu.

Regresná funkcia je matematická funkcia, ktorá je daná príslušným predpisom v zákone úmrtnosti, a jej parametre sú neznáme. Vo všetkých troch metódach sa uvažuje o nelineárnej regresnej funkcii s vektorom parametrov $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p)$. Cieľom je získať také odhady parametrov regresnej funkcie, pre ktoré je súčet štvorcov odchýlok regresnej funkcie od hodnôt vysvetľovanej premennej čo najmenší, čo zapíšeme takto:

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})]^2 \rightarrow \min. \quad (7)$$

Všetky metódy podľa [14] vychádzajú z počiatočných (vstupných) odhadov parametrov $\boldsymbol{\theta}^0 = (\theta_1^0 \ \theta_2^0 \ \dots \ \theta_p^0)$, ktoré sa v jednotlivých iteráciách vylepšujú. V-te vylepšené odhady získané vo v -tej iterácii, pričom $v = 0, 1, 2, \dots$, sa označujú takto $\boldsymbol{\theta}^v = (\theta_1^v \ \theta_2^v \ \dots \ \theta_p^v)$. V každej iterácii sa počíta hodnota funkcie $S(\boldsymbol{\theta}^v)$, pričom by malo platiť $S(\boldsymbol{\theta}^{v+1}) \leq S(\boldsymbol{\theta}^v)$, čo znamená, že regresná funkcia s parametrami odhadnutými v iterácii $(v+1)$ lepšie opisuje cieľovú premennú (vysvetľovanú premennú) ako regresná funkcia s parametrami odhadnutými vo v -tej iterácii.

Gaussova-Newtonova metóda (metóda linearizácie) využíva vo v -tej iterácii linearizáciu prostredníctvom Taylorovho rozvoja 1. rádu v bode $\boldsymbol{\theta}^v$:

$$f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) \doteq f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}^v) + \sum_{j=1}^p \left\{ \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^v} \cdot (\theta_j - \theta_j^v) \right\} \quad (8)$$

V každej iterácii ($v = 0, 1, 2, \dots$) sa urobia substitúcie:

$$f_i^v = f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}^v) \quad \beta_j^v = \theta_j - \theta_j^v \quad z_{ij}^v = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^v} \quad (9)$$

čím sa získa lineárny regresný model:

$$\underbrace{y_i - f_i^v}_{y_i^v} = \sum_{j=1}^p \beta_j^v z_{ij}^v + \varepsilon_i \quad \text{resp.} \quad \mathbf{y}^v = \mathbf{Z}^v \cdot \boldsymbol{\beta}^v + \boldsymbol{\varepsilon}^v \quad (10)$$

Vektor parametrov β^v tohto regresného modelu sa odhadne metódou najmenších štvorcov a z jeho odhadu \mathbf{b}^v sa vypočíta vektor vylepšených odhadov pre iteráciu $(v + 1)$ takto:

$$\boldsymbol{\theta}^{v+1} = \boldsymbol{\theta}^v + \mathbf{b}^v \quad (11)$$

Celý proces pokračuje až do iterácie, v ktorej je splnené konvergenčné kritérium (bližšie pozri [12]). Nevýhodou tejto metódy je, že niekedy konverguje veľmi pomaly, čo vedie k veľkému počtu iterácií. V určitých prípadoch môže dokonca oscilovať. Vtedy sa rast a pokles súčtu štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$ opakuje až pokiaľ sa hodnota nestabilizuje.

Základná stratégia *gradientnej metódy (metódy najstrmšieho zostupu)* spočíva v iteračnom spôsobe hľadania globálneho minima funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$. Začína sa v začiatočných odhadoch $\boldsymbol{\theta}^0 = (\theta_1^0 \ \theta_2^0 \ \dots \ \theta_p^0)$, pre ktoré sa vypočíta súčet štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$. Hodnota parametra sa zvýši o malú hodnotu. Ak súčet štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$ poklesne, pokračuje sa vo zvyšovaní hodnoty parametra. Ak však hodnota $S(\boldsymbol{\theta})$ vzrastie, hodnota parametra sa vráti na pôvodnú úroveň a následne sa zníži. Tento postup sa opakuje veľa krát, pričom každý krok by mal viesť k zníženiu hodnoty súčtu štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$. Ak hodnota $S(\boldsymbol{\theta})$ namiesto toho vzrastie, tak krok bol veľký a preskočilo sa minimum funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$. V takomto prípade sa veľkosť kroku zmenší a pokračuje sa uvedeným algoritmom. Proces sa končí, ak sa nájde bod, ktorý je podľa konvergenčného kritéria dostatočne blízky globálnemu minimu funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$.

V porovnaní s Gaussovou-Newtonovou metódou gradientná metóda pracuje:

- lepšie v prvých iteráciách (zo zlých počiatočných odhadov dokáže efektívnejšie nájsť vhodný smer k minimu funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$),
- horšie v posledných iteráciách (v oblasti okolo minima funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$ často konverguje pomaly alebo osciluje).

Levenbergova-Marquardtova metóda sa niekedy označuje ako *Marquardtov kompromis*, čo vystihuje jej snahu spojiť prednosti oboch predchádzajúcich metód. V začiatočných iteráciách využíva gradientnú metódu a s približovaním sa k oblasti minima funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$ postupne prepína na Gaussovou-Newtonovu metódu.

Podrobnosti o matematickom aparáte iteračných metód určených na odhad nelineárnych regresných modelov záujemcovia nájdu napríklad v [3, 6, 9, 10]. V týchto prácach sú uvedené aj možnosti aplikácie nelineárnej regresie v rôznych komerčných alebo open-source softvéroch. V príspevku budú na odhad nelineárnych regresných modelov aplikované všetky tri uvedené iteračné metódy, a to prostredníctvom procedúry nelineárnej regresie (*PROC NLIN*) v aplikácii Enterprise Guide štatisticko-analytického softvéru SAS.

4. ODHADY PARAMETROV MODELOV ÚMRTNOSTI V SR V ROKU 2018

Modelovanie úmrtnosti nelineárnou regresiou nám umožňuje určiť bodový ako aj intervalový odhad parametrov jednotlivých modelov zákonov úmrtnosti. V článku sú tiež prezentované bodové aj intervalové odhady pravdepodobností úmrtnosti žien, resp.

mužov získané pre jednotlivé vekové skupiny života na základe uvedených štyroch parametrických zákonov úmrtnosti.

Analýzu úmrtnosti uskutočníme pre populáciu žien a populáciu mužov na Slovensku v roku 2018 vo veku od 50 do 105 rokov, pretože vybrané modely sú vhodné pre vyššie veku. Použili sme miery úmrtnosti uvedené na stránke ŠÚ SR v Tabuľke života [18]. V tabuľke č. 1 a tabuľke č. 2 uvádzame počiatkové a výsledné odhady parametrov regresných funkcií modelov úmrtnosti (H-P – Heligmanov-Pollardov model, K – Kannistov model, C-K – Coaleov-Kiskerov model), osobitne pre ženy a pre mužov vo veku 50 až 105 rokov. Tieto súhrnné tabuľky navyše uvádzajú hodnoty funkcie $S(\theta)$ pri počiatkových a pri výsledných odhadoch parametrov. Na základe hodnôt $S(\theta^v)$ výsledných odhadov parametrov vieme porovnať kvalitu modelov. Z výsledkov vyplýva, že vo vekovom intervale 50 až 105 rokov bol v roku 2018 z uvedených modelov najlepší Kannistov model, a to pre populáciu žien (tabuľka č. 1), ako aj pre populáciu mužov (tabuľka č. 2). Tabuľka č. 1 a tabuľka č. 2 porovnávajú aj jednotlivé iteračné metódy. Gradientná metóda nespĺnila konvergenčné kritérium pri odhade žiadneho modelu. Poznamenajme, že pri zmenených vstupných odhadoch parametrov a ak by sme zvýšili maximálny počet iterácií, ktorý bol nastavený na hodnote 100, metóda by možno splnila konvergenčné kritérium, ale tomuto problému sme sa nevenovali, pretože Gaussova-Newtonova a Levenbergova-Marquardtova metóda dosiahli uspokojujúce výsledky. Obidve iteračné metódy viedli k rovnakým výsledným odhadom parametrov modelov.

Tabuľka č. 1: Súhrnná tabuľka odhadov parametrov modelov úmrtnosti, porovnanie kvality modelov prostredníctvom funkcie $S(\theta)$ a porovnanie efektívnosti použitých iteračných metód pre populáciu žien vo veku 50 až 105 rokov

Charakteristika		Model		
		H-P	K	C-K
Počiatkové odhady	a^0	0,001	0,001	0,001
	b^0	0,001	0,001	0,001
	c^0	–	–	0,001
	$S(\theta^0)$	4,9535	4,9326	1,38E10
Výsledné odhady	a^v	8,088E-9	1,137E-7	-0,00211
	b^v	0,1915	0,1537	0,5067
	c^v	–	–	-30,1198
	$S(\theta^v)$	0,0135	0,00122	0,00293
v – počet iterácií	Iteračná metóda			
	Gauss-Newton	33	30	19
	Gradient	nekonverguje	nekonverguje	nekonverguje
	Marquardt	28	27	19

Vysvetlivky: H-K – Heligmanov-Pollardov model, K – Kannistov model, C-K – Coaleov-Kiskerov model.

Zdroj: [18], spracované v SAS Enterprise Guide

Tabuľka č. 2: Súhrnná tabuľka odhadov parametrov modelov úmrtnosti, porovnanie kvality modelov prostredníctvom funkcie $S(\theta)$ a porovnanie efektívnosti použitých iteračných metód pre populáciu mužov vo veku 50 až 105 rokov

Charakteristika		Model		
		H-P	K	C-K
Počiatkové odhady	a^0	0,001	0,001	0,001
	b^0	0,001	0,001	0,001
	c^0	–	–	0,001
	$S(\theta^0)$	3,8957	3,8753	1,38E10
Výsledné odhady	a^v	1,216E-6	3,819E-6	-0,00066
	b^v	0,1376	0,1159	0,2105
	c^v	–	–	-15,0651
	$S(\theta^v)$	0,0107	0,00239	0,00246
v – počet iterácií	Iteračná metóda			
	Gauss-Newton	32	21	20
	Gradient	nekonverguje	nekonverguje	nekonverguje
	Marquardt	26	24	20

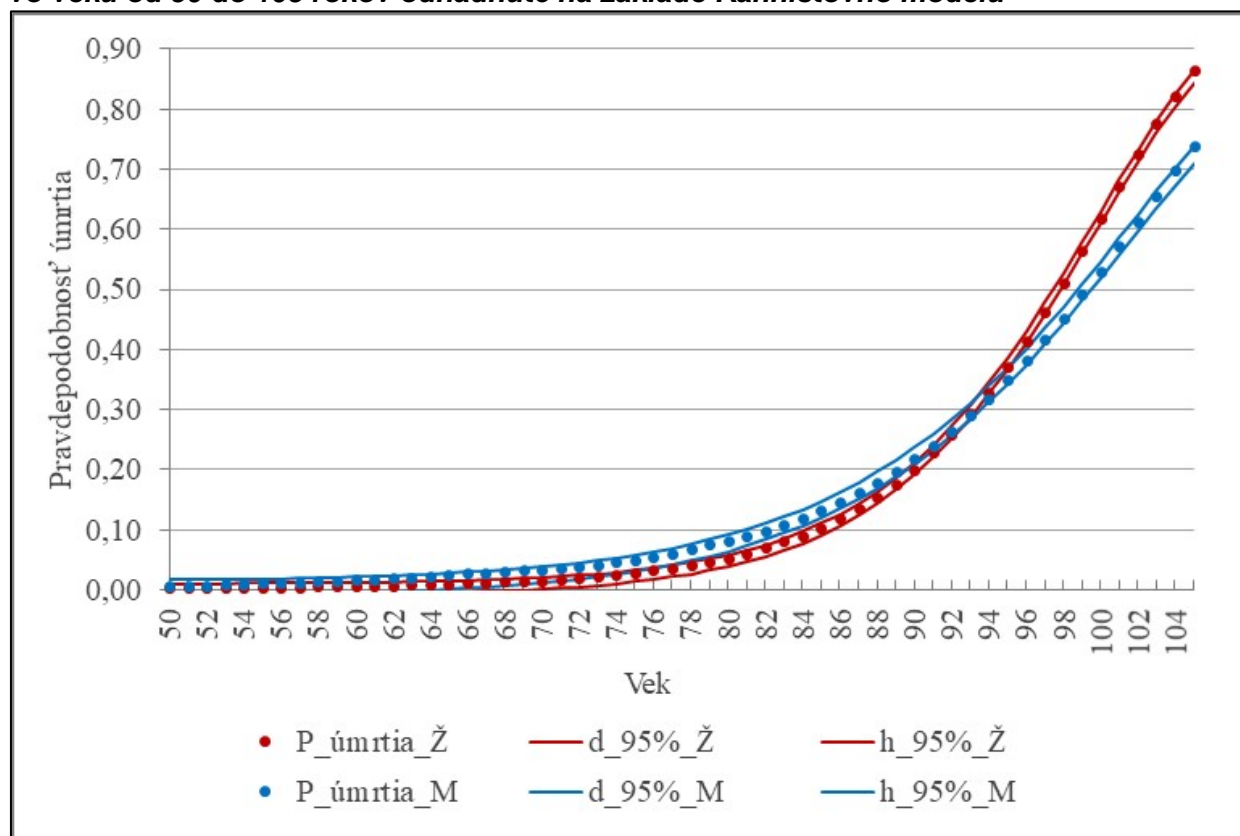
Vysvetlivky: H-K – Heligmanov-Pollardov model, K – Kannistov model,
C-K – Coaleov-Kiskerov model a CoDe – CoDe model.

Zdroj: [18], spracované v SAS Enterprise Guide

Ako sme uviedli, vo vekovom intervale 50 až 105 rokov sme najlepšie výsledky pre populáciu žien aj pre populáciu mužov v roku 2018 dosiahli Kannistovým modelom úmrtnosti. Preto sme na základe odhadnutých Kannistových modelov vypočítali aj 95 % intervaly spoľahlivosti pre pravdepodobnosti úmrtia vzťahujúce sa na analyzované roky veku života žien a mužov. Porovnanie týchto intervalov spoľahlivosti pre populáciu žien a populáciu mužov poskytuje graf č. 1.

V prípade populácie žien sme získali kvalitnejší model, pretože hodnota funkcie $S(\theta)$ bola v poslednej iterácii v populácii žien [$S(\theta^v) = 0,00122$] nižšia ako v populácii mužov [$S(\theta^v) = 0,00239$]. Túto skutočnosť odzrkadľujú aj intervalové odhady pravdepodobnosti úmrtnosti na grafe č. 1, ktoré sú v prípade populácie žien užšie ako v prípade mužov, a to vo všetkých sledovaných rokoch veku života.

Graf č. 1: 95 % intervaly spoľahlivosti pre pravdepodobnosti úmrtia žien a mužov vo veku od 50 do 105 rokov odhadnuté na základe Kannistovho modelu



Vysvetlivky: P_úmrtia_Ž – bodové odhady pravdepodobnosti úmrtia žien,
d_95 %_Ž; h_95 %_Ž – dolné (d) a horné (h) hranice 95 % intervalových odhadov pravdepodobnosti úmrtia žien,
P_úmrtia_M – bodové odhady pravdepodobnosti úmrtia mužov,
d_95 %_M; h_95 %_M – dolné (d) a horné (h) hranice 95 % intervalových odhadov pravdepodobnosti úmrtia mužov.

Zdroj: [18], spracované v SAS Enterprise Guide

Parametrické modely (zákony úmrtnosti) môžu byť užitočné aj v súvislosti s prognózovaním úmrtnosti populácie na základe analýzy historických trendov vývoja uvažovaných parametrov modelov. Istým obmedzením týchto modelov je však ich závislosť od konkrétneho matematického vzťahu, čo znemožňuje, aby model reagoval na možné zmeny vo vývoji úmrtnosti v budúcnosti.

5. ZÁVER

Hlavným parametrom modelov slúžiacich na stanovenie primeraného kapitálu na krytie rizík v životnom poistení je ročná miera úmrtnosti, ktorá predstavuje istú štatisticky stanovenú pravdepodobnosť úmrtia osoby vo veku x , resp. pravdepodobnosť, že osoba vo veku x sa nedožije nasledujúceho roka. Ide o stochastický parameter, ktorého odchýlky a výkyvy môžu mať výrazný dosah na záväzky poisťovne, a tým aj na jej solventnosť. Tieto odchýlky a celkový vývoj miery úmrtnosti si vyžadujú neustálu pozornosť, pretože je od nich závislá finančná výkonnosť a stabilita poisťovní.

Výhodou využitia nelineárnej regresnej analýzy pri odhade parametrov zákonov úmrtnosti je aj skutočnosť, že okrem bodových odhadov parametrov modelu získame štandardné chyby odhadov, ktoré umožňujú testovať štatistickú významnosť odhadnutých parametrov a konštruovať intervalové odhady pre parametre. Nelineárna regresná analýza navyše poskytuje možnosť realizovať intervalové odhady predikovaných hodnôt cieľovej premennej, ktoré prislúchajú konkrétnym hodnotám vysvetľujúcich premenných. Kannistove modely, ktoré boli najvhodnejšie na modelovanie mier úmrtnosti žien a mužov vo veku nad 50 rokov dobre vystihovali empirické miery úmrtnosti, čo potvrdili nielen nízke hodnoty súčtov štvorcov rezíduí, ale aj pomerne úzke 95 % intervalové odhady pravdepodobnosti úmrtia prislúchajúce analyzovaným rokom života.

LITERATÚRA

- [1] FORFAR, D. O.: Mortality laws. Wiley StatsRef: Statistics Reference Online, 2014, s. 1 – 11.
- [2] GAMPE, J.: Human mortality beyond age 110. In: Supercentenarians. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, s. 219 – 230.
- [3] GAVIN, H. P.: The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems: Department of Civil and Environmental Engineering. Duke University, 2019.
- [4] GAVRILOV, L. A. – GAVRILOVA, N. S.: The biology of life span: a quantitative approach. New York: Harwood Academic Publisher, 1991.
- [5] GAVRILOVA, N. S. – GAVRILOV, L. A.: Stárnutí a dlouhověkost: Zákony a prognózy úmrtnosti pro stárnoucí populace. In: Demografie, 2011, č. 2, s. 109 – 128.
- [6] GOULD, N. I. M. – REES, T. – SCOTT, J.: A higher order method for solving nonlinear least-squares problems. RAL Preprint RAL-P-2017-010, STFC Rutherford Appleton Laboratory, 2017.
- [7] KANNISTO, V.: Development of oldest-old mortality, 1950-1990: Evidence from 28 developed countries (No. 1). University Press of Southern Denmark, 1994.
- [8] MARQUARDT, D.: An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters. In: Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, č. 2, s. 431 – 441.
- [9] MONDRAGON, P. F. – BORCHERS, B.: A comparison of nonlinear regression codes. In: Journal of Modern Applied Statistical Methods, 2005, č. 1, s. 343 – 351.
- [10] PANIK, M.: Regression modeling: Methods, theory, and computation with SAS. Chapman and Hall/CRC, 2009. ISBN 978-1420091977.
- [11] PITACCO, E.: High age mortality and frailty. Some remarks and hints for actuarial modeling. CEPAR Working Paper, 2017, č. 1.
Available at: <http://www.cepar.edu.au/working-papers/working-papers-2016.aspx>.
- [12] SAS Institute Inc.: The NLIN Procedure. In: SAS/STAT 13.1® User's Guide. Cary, NC: SAS Institute Inc., 2013.
- [13] SLUD, E. V.: Actuarial mathematics and life-table statistics. Chapman & Hall/CRC, 2012. ISBN 978-1439861974.
- [14] ŠOLTÉS, E.: Regresná a korelačná analýza: s aplikáciami v softvéri SAS. Bratislava: Letra Edu, 2019. 238 s. ISBN 978-80-89962-38-9.
- [15] ŠOLTÉSOVÁ, T.: Analýza úmrtnosti na Slovensku vo vzťahu k parametrickým modelom úmrtnosti. In: Softvérová podpora v predmetoch študijného programu Aktuárstvo: vedecká konferencia. Bratislava: EKONÓM, 2016, s. 76 – 81.

[16] ŠOLTÉSOVÁ, T.: Aktuárske modelovanie v životnom poistení. Bratislava: Vydavateľstvo Letra Edu, 2019. 148 s. ISBN 978-80-89962-36-5.

[17] ŠPROCHA, B. – MAJO, J.: Storočie populačného vývoja Slovenska I: demografické procesy. Bratislava: INFOSTAT, 2016.

[18] DATAcube, Štatistický úrad SR [online] [cit. 11. 3. 2020]. Dostupné na: https://slovak.statistics.sk/wps/portal/ext/themes/demography/population/indicators!/ut/p/z1/jdBBDoIwEAXQs3iCTkFpWRYMpWkDtFDAbgwr00TRhfH8GnRrYXaTvD-ZfOTQiNw8vfxlevr7PF0_-8ki5141NMswg9rgAjSArCTthM4JGhagifgCmvURCFIZLLXm0hLktuRzzso9UQBU8QMIVlqT6jgGFm_Lw59hsC0fAC58fkBulaEGFIC0TcTSPc-Ppi5AdHIEW5VEwJMVAPgHQiWtvm4WWtH8MKz3Ru7ePyp/dz/d5/L2dJQSEvUUt3QS80TmxFL1o2X1E3SThCQjFBMDhCVjIwSTdOUjFLUVFHSTky/.

RESUMÉ

V príspevku sme odhadli parametre troch vybraných parametrických modelov úmrtnosti (Heligmanov-Pollardov, Coaleov-Kiskerov a Kannistov model), tzv. zákonov úmrtnosti. Použili sme najaktuálnejšie dostupné údaje o miere úmrtnosti mužov a žien na Slovensku v roku 2018 zverejňované Štatistickým úradom Slovenskej republiky. Z dôvodu presnejšej analýzy sme uvedené modely použili zvlášť pre mužov a zvlášť pre ženy. Z údajov v intervale od 0 do 105 rokov sme modelovali a porovnávali úmrtnosť v období tzv. neskorej dospelosti a staroby, čiže vo veku od 50 rokov. Z použitých modelov mal pre obe pohlavia najlepšie výsledky Kannistov zákon úmrtnosti, a preto sme na základe odhadnutých parametrov Kannistových modelov vypočítali aj 95 % intervaly spoľahlivosti pre miery úmrtnosti prislúchajúce analyzovaným rokom života mužov a žien. Odhad parametrov zákonov úmrtnosti sme uskutočnili pomocou nelineárnej regresnej analýzy v softvéri SAS Enterprise Guide, kde sme okrem bodových odhadov parametrov modelu získali aj štandardné chyby odhadov a určili sme intervalové odhady parametrov. Tieto odhady parametrov modelov môžu byť užitočné aj v súvislosti s prognózovaním úmrtnosti populácie na základe analýzy historických trendov ich vývoja.

RESUME

In this paper we estimated the parameters of three selected parametric models of mortality (Heligman-Pollard, Coale-Kisker and Kannist model), the so-called mortality laws. We used the most recently available data of the mortality rates of men and women in Slovakia in 2018 published by the Statistical Office of the Slovak Republic. For more accurate analysis, we used the above-mentioned models separately for men and for women. Based on data from the age interval 0 to 105 years, we modelled and compared the mortality in the period of the so-called late adulthood and old age, i. e. for ages 50 years and older. Out of these models used, the Kannist law of mortality had the best results for both sexes and therefore based on the estimated parameters of the Kannist models, we also calculated 95% confidence intervals for mortality rates corresponding to the analyzed ages of men and women.

We estimated the parameters of mortality laws using nonlinear regression analysis in the SAS Enterprise Guide software, where in addition to the point estimates of model parameters, we also obtained standard errors and determined interval estimates for parameters. These estimates of model parameters may also be useful in connection with

forecasting population mortality based on an analysis of historical trends of their development.

PROFESIJNÝ ŽIVOTOPIS

Doc. Mgr. Tatiana Šoltéssová, PhD., od roku 1998 pôsobí na katedre matematiky (v roku 2011 premenovaná na katedru matematiky a aktuárstva) Fakulty hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave. Titul PhD. získala v roku 2007 vo vednom odbore štatistika na FHI EU v Bratislave. V januári 2020 absolvovala habilitačné konanie v odbore kvantitatívne metódy v ekonómii, prepojenom na študijný odbor ekonómia a manažment. V rámci pedagogickej činnosti sa venuje výučbe matematickej analýzy a jej využitiu v ekonomických príkladoch, výučbe lineárnej algebry, finančnej a aktuárskej matematiky. Jej vedecká činnosť sa zameriava na využitie stochastického prístupu pri modelovaní v životnom poistení.

Ing. Jana Kútiková, PhD., pôsobí ako doktorandka v študijnom programe kvantitatívne metódy v ekonómii na Fakulte hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave. V roku 2019 ukončila štúdium v študijnom programe aktuárstvo na Fakulte hospodárskej informatiky a získala titul Ing. V súčasnosti vyučuje predmety na katedre štatistiky a venuje sa využitiu štatistických metód v životnom poistení.

KONTAKT

tatiana.soltesova@euba.sk

jana.kutikova@euba.sk