SLOVENSKÁ ŠTATISTIKA a DEMOGRAFIA

SLOVAK STATISTICS and DEMOGRAPHY

2/2020
ročník/volume 30

Recenzovaný vedecký časopis so zameraním na prezentáciu moderných štatistických a demografických metód a postupov.

Scientific peer-reviewed journal focusing on the presentation of modern statistical and demographic methods and procedures.

Článok/Article: 3

Typ článku/Type of article: vedecký článok/scientific article

Strany/Pages: 35 – 56

Dátum vydania/Publication date: 15. apríl 2020/April 15, 2020

Diana BÍLKOVÁ
Fakulta informatiky a statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze

ČTYŘPARAMETRICKÉ A TŘÍPARAMETRICKÉ LOGNORMÁLNÍ KŘIVKY JAKO MODELY MZDOVÝCH ROZDĚLENÍ

FOUR-PARAMETRIC AND THREE-PARAMETRIC LOGNORMAL CURVES AS WAGE DISTRIBUTION MODELS

ABSTRAKT
Tento článek se zabývá konstrukcí modelů rozdělení mezd pomocí čtyřparametrových a tříparametrových lognormálních křivek. Hlavním cílem výzkumu je porovnat přesnost získaných modelů s využitím obou typů lognormálního rozdělení jako modelů rozdělení mezd. Minimální mzda v daném roce představuje počátek čtyřparametrických a tříparametrických lognormálních křivek. Odhady zbývajících tří, respektive dvou parametrů, jsou konstruovány pomocí kvantilové metody. Testové kritérium chí-kvadrát je použito k vyhodnocení přesnosti získaných modelů. Téměř ve všech případech mzdových modelů poskytly čtyřparametrové lognormální křivky přesnější výsledky než tříparametrové lognormální křivky. Výsledky z hlediska přesnosti obou typů lognormálních křivek jsou stejně přesné pouze v několika případech. Rozdíly v přesnosti čtyřparametrových a tříparametrových mzdových modelů však nejsou kritické.

ABSTRACT
This paper deals with the construction of wage distribution models using four-parameter and three-parameter lognormal curves. The main objective of the research is to compare the accuracy of the models obtained using both types of lognormal distribution as wage distribution models. The minimum wage in a given year represents the beginning of four-parameter and three-parameter lognormal curves. The estimates of the remaining three or two parameters are constructed using the quantile method. The chi-square testing criterion is used for the evaluation of the accuracy of the models obtained. In almost all cases of wage models, the four-parameter lognormal curves yielded more accurate results than the three-parameter lognormal curves. The results in terms of accuracy of both types of lognormal curves are equally accurate only in a few cases. However, the differences in the accuracy of the four-parameter and three-parameter wage models are not critical.

KLÍČOVÁ SLOVA
modely mzdových rozdělení, čtyřparametrické lognormální křivky, tříparametrické lognormální křivky, kvantilová metoda bodového odhadu parametrů, testové kritérium chí-kvadrát, přesnost bodového odhadu parametrů

KEY WORDS
wage distribution models, four-parameter lognormal curves, three-parameter lognormal curves, quantile method of point parameter estimation, chi-square testing criterion, accuracy of point parameter estimation

1. ÚVOD
Lognormální rozdělení je po mnoho desetiletí nástrojem pro konstrukci teoretických modelů rozmanitých analyzovaných proměnných v různých technických,

fyzikálních nebo ekonomických oblastech. Například [4] používá toto teoretické pravděpodobnostní rozdělení v oblasti kontroly jakosti nebo dvojice autorů [3] již využívá toto pravděpodobnostní rozdělení při modelování personálních příjmů. Toto pravděpodobnostní rozdělení má různé modifikace od dvouparametrické až po čtyřparametrickou alternativu. Příkladem použití čtyřparametrické alternativy tohoto pravděpodobnostního rozdělení je studie [6], kde autoři používají čtyřparametrickou verzi tohoto rozdělení ve spojení s modelováním rozdělení atmosférických aerosolových částic. Již v polovině šedesátých let minulého století používá [5] čtyřparametrickou verzi tohoto pravděpodobnostního rozdělení v kontextu ztrát z rozsahu. O něco později [2] provádí výzkum problematiky odhadování parametrů čtyřparametrické verze lognormálního rozdělení.

Tento příspěvek se zabývá problematikou odhadu parametrů čtyřparametrického lognormálního rozdělení kvantilovou metodou v souvislosti s konstrukcí modelů rozdělení mezd. Definice a popis čtyřparametrického a tříparametrického lognormálního rozdělení byly čerpány ze zdrojů [1] a [7], konstrukce odhadů parametrů kvantilovou metodou je dosti podrobná a vychází z vlastního odvození.

Hlavním cílem této studie je srovnání přesnosti modelů mzdových rozdělení konstruovaných s využitím čtyřparametrických a tříparametrických lognormálních křivek. Pro získání odhadů parametrů byla použita v obou případech kvantilová metoda odhadu parametrů. V obou případech lognormálního rozdělení počátek lognormálních křivek představovala minimální mzda v příslušném roce. Testové kritérium chí-kvadrát bylo použito při vyhodnocení přesnosti získaných modelů. Hlavní vědecká hypotéza spočívá v tvrzení, že při použití kvantilové metody odhadování parametrů vedou čtyřparametrické lognormální modely k přesnějším výsledkům než tříparametrické lognormální modely.

Tabulka č. 1: Rozsahy výběrových souborů zaměstnanců podle velikosti jednotky (tisíce zaměstnanců)

Velikost jednotky	Rok				
	2014	2015	2016	2017	2018
Méně než 10 zaměstnanců	527,5	571,4	570,5	576,5	593,0
Od 10 do 49 zaměstnanců	738,0	693,9	702,0	697,2	674,5
Od 50 do 249 zaměstnanců	795,7	811,7	830,5	842,0	866,4
Od 250 do 999 zaměstnanců	657,6	677.2	697,6	714,8	725,5
Od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	657,6	1 340,3	494,8	518,3	525,6
Od 5 000 zaměstnanců	305,6	298,7	409,6	320,4	329,4

Zdroj: www.czso.cz

Tabulka č. 2: Vývoj minimální mzdy (v Kč) v období let 2014 – 2018

Rok	2014	2015	2016	2017	2018
Minimální mzda	8 500	9 200	9 900	11 000	12 200

Zdroj: www.mpsv.cz

Data pro tento výzkum a rozsahy výběrových souborů pocházejí z oficiálních webových stránek Českého statistického úřadu (ČSÚ). Data zahrnují mzdy zaměstnanců České republiky, hrubá měsíční nominální mzda v Kč představuje hlavní zkoumanou proměnnou. Odpovídající data ČSÚ byla ve formě intervalového rozdělení četností s krajními otevřenými intervaly, individuální data nejsou běžně dostupná. Analyzovaná data byla roztříděna podle velikosti jednotky a pokrývala období od roku 2014 do roku 2018, viz tabulka č. 1. Tabulka č. 2 představuje vývoj minimální mzdy v příslušném období. Výběrové kvartily použité v rámci kvantilové metody odhadu parametrů byly odhadnuty z příslušného intervalového rozdělení četností. Celkově bylo takto zkoumáno 30 mzdových rozdělení.

Data zahrnují odměnu za vykonanou práci zaměstnanců jak v podnikatelském, tak nepodnikatelském sektoru ekonomiky. Mzda se vyplácí zaměstnanci za vykonanou práci v soukromé (podnikatelské) sféře, zatímco plat se vydělává ve sféře státní (nepodnikatelské). V této studii, stejně jako data prezentovaná ČSÚ, jsou pod termín mzda zahrnuty mzdy v podnikatelské sféře i platy v nepodnikatelské sféře.

2. TEORIE A METODY

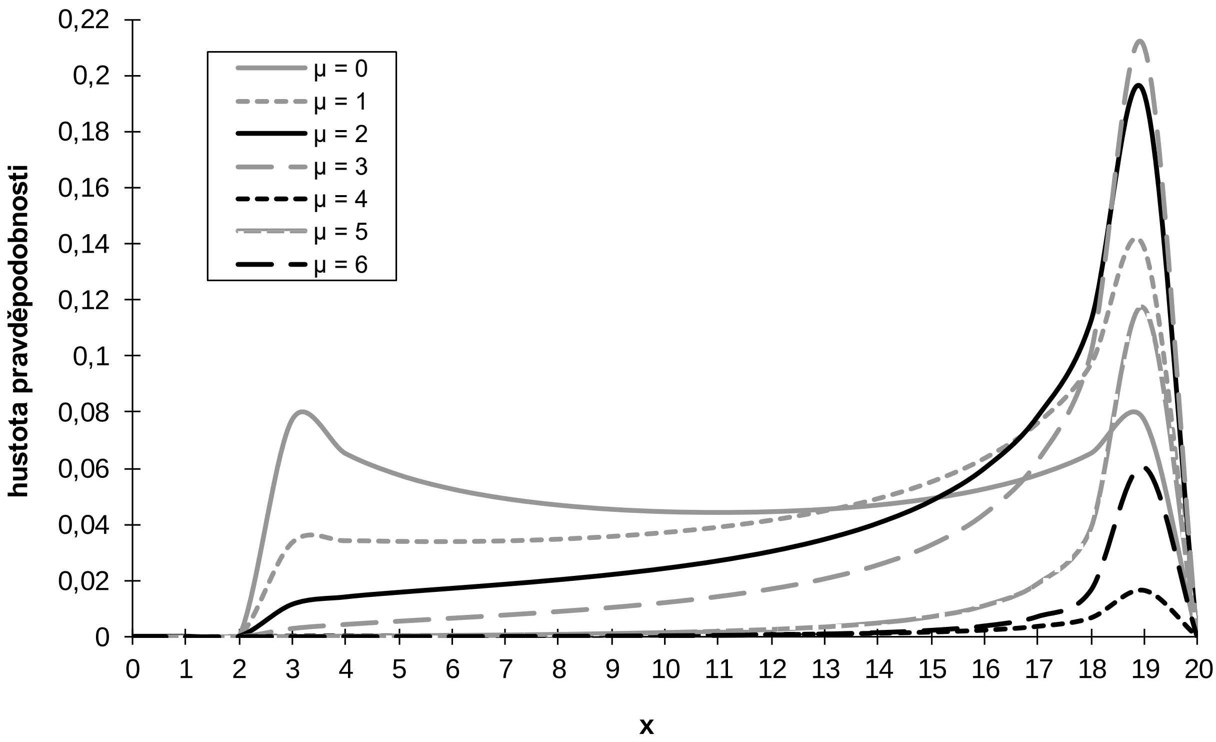
2.1 Čtyřparametrické lognormální rozdělení

Náhodná veličina X má čtyřparametrické lognormální rozdělení s parametry μ, σ^2, θ a τ, kde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, $-\infty < \theta < \tau < \infty$, jestliže její hustota pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x;\,\mu,\,\sigma^2,\,\theta,\,\tau) = \frac{(\tau-\theta)}{\sigma\cdot(x-\theta)\cdot(\tau-x)\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{\left(\ln\frac{x-\theta}{\tau-x}-\mu\right)^2}{2\,\sigma^2}\right], \qquad \theta < x < \tau, \tag{1}$$

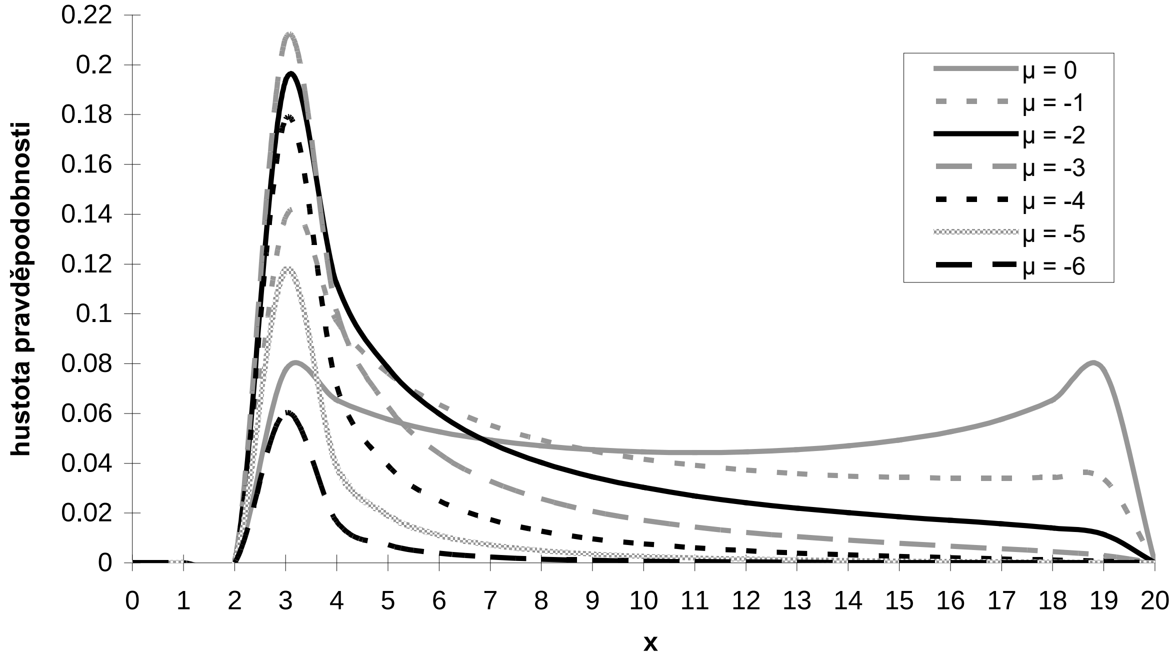
$$= 0, \qquad \text{jinak.}$$

Obrázek č. 1: Hustota pravděpodobnosti čtyřparametrického lognormálního rozdělení pro hodnoty parametrů σ = 2 (σ² = 4); θ = 2; τ = 20



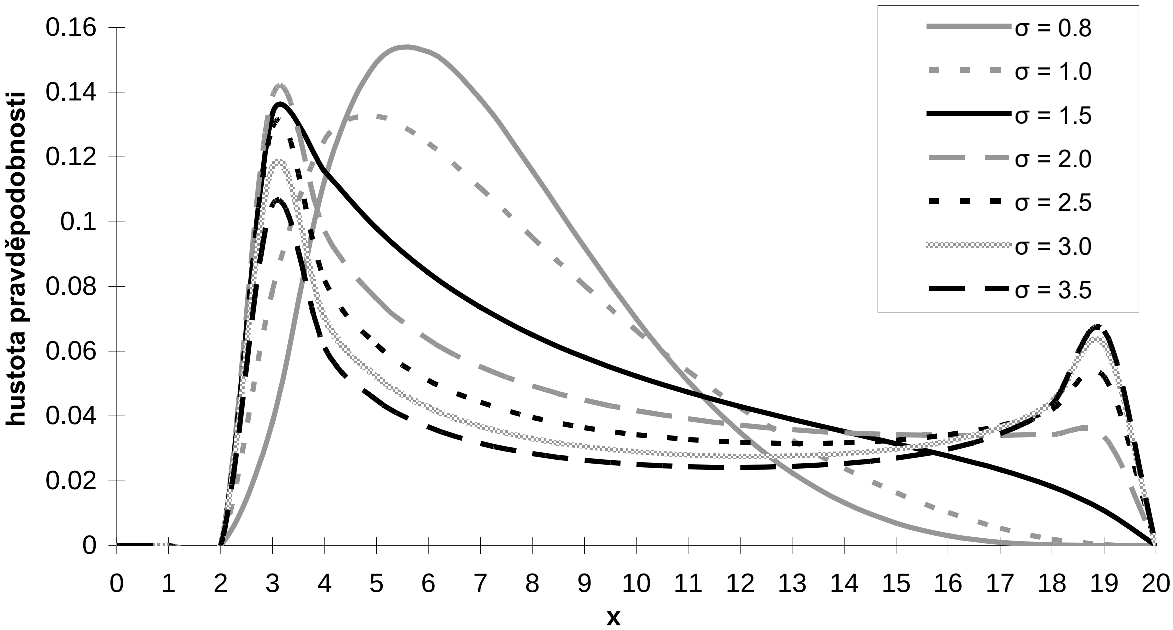
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 2: Hustota pravděpodobnosti čtyřparametrického lognormálního rozdělení pro hodnoty parametrů σ = 2 (σ² = 4); θ = 2; τ = 20



Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 3: Hustota pravděpodobnosti čtyřparametrického lognormálního rozdělení pro hodnoty parametrů μ = –1; θ = 2; τ = 20



Zdroj: vlastní konstrukce

Lognormální rozdělení s parametry μ, σ^2, θ a τ budeme značit LN(μ, σ^2, θ, τ). Funkce hustoty pravděpodobnosti čtyřparametrického lognormálního rozdělení LN(μ, σ^2, θ, τ) může mít velmi odlišné tvary v závislosti na hodnotách parametrů tohoto rozdělení. Rozdělení může být rovněž dvouvrcholové pro $\sigma^2 > 2$ a $|\mu| < \sigma^2 \cdot \sqrt{(1-2/\sigma^2)} - 2\tanh^{-1}\sqrt{(1-2/\sigma^2)}$. Obrázky č. 1 – 3 představují ilustrační příklady tvarů hustoty pravděpodobnosti čtyřparametrického lognormálního rozdělení v závislosti na hodnotách parametrů.

Jestliže má náhodná veličina *X* čtyřparametrické lognormální rozdělení s parametry μ, σ^2, θ a τ, potom náhodná veličina:

$$Y = \ln \frac{X - \theta}{\tau - X} \tag{2}$$

má normální rozdělení s parametry μ a σ^2 a náhodná veličina:

$$U = \frac{\ln \frac{X - \theta}{\tau - X} - \mu}{\sigma} \tag{3}$$

má normované normální rozdělení.

Parametr μ tedy představuje střední hodnotu náhodné veličiny (2) a parametr σ^2 je rozptyl této náhodné veličiny. Parametr θ je počátek lognormálního rozdělení (teoretické minimum) a parametr τ představuje koncový bod lognormálního rozdělení (teoretické maximum).

2.2 Tříparametrické lognormální rozdělení

Náhodná veličina *X* má tříparametrické lognormální rozdělení s parametry μ, σ^2 a θ, kde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, $-\infty < \theta < \infty$, jestliže její hustota pravděpodobnosti má tvar:

$$\begin{aligned} f(x;\, \mu, \sigma^2, \theta) &= \frac{1}{\sigma \cdot (x-\theta) \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{[\ln(x-\theta)-\mu]^2}{2\sigma^2}\right], \qquad && x > \theta, \\ &= 0, && \text{jinak.} \end{aligned} \tag{4}$$

Lognormální rozdělení s parametry μ, σ^2 a θ budeme značit LN(μ, σ^2, θ). Funkce hustoty pravděpodobnosti tříparametrického lognormálního rozdělení LN(μ, σ^2, θ) je vždy kladně zešikmená. Obrázky č. 4 – 6 představují ilustrační příklady tvarů hustoty pravděpodobnosti tříparametrického lognormálního rozdělení v závislosti na hodnotách parametrů. Tyto obrázky kopírují hodnoty parametrů vždy příslušného obrázku č. 1 – 3, přičemž vynechávají parametr τ.

Jestliže má náhodná veličina *X* tříparametrické lognormální rozdělení s parametry μ, σ^2 a θ, potom náhodná veličina:

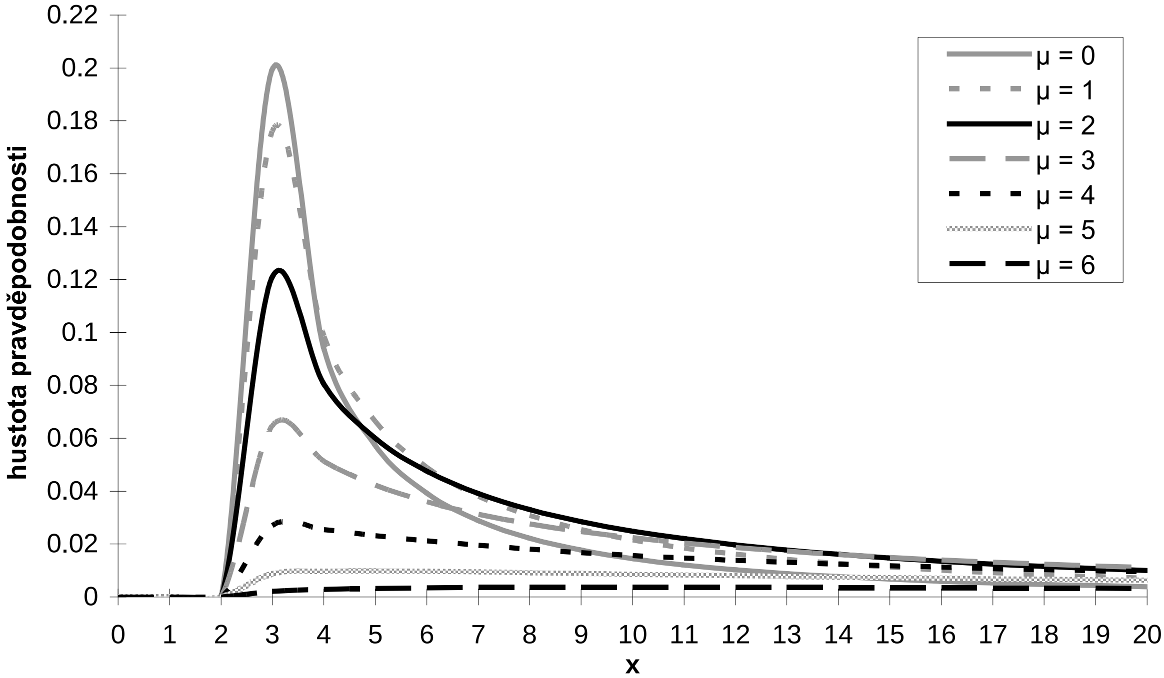
$$Y = \ln(X - \theta) \tag{5}$$

má normální rozdělení s parametry μ a σ^2 a náhodná veličina:

$$U = \frac{\ln(X - \theta) - \mu}{\sigma} \tag{6}$$

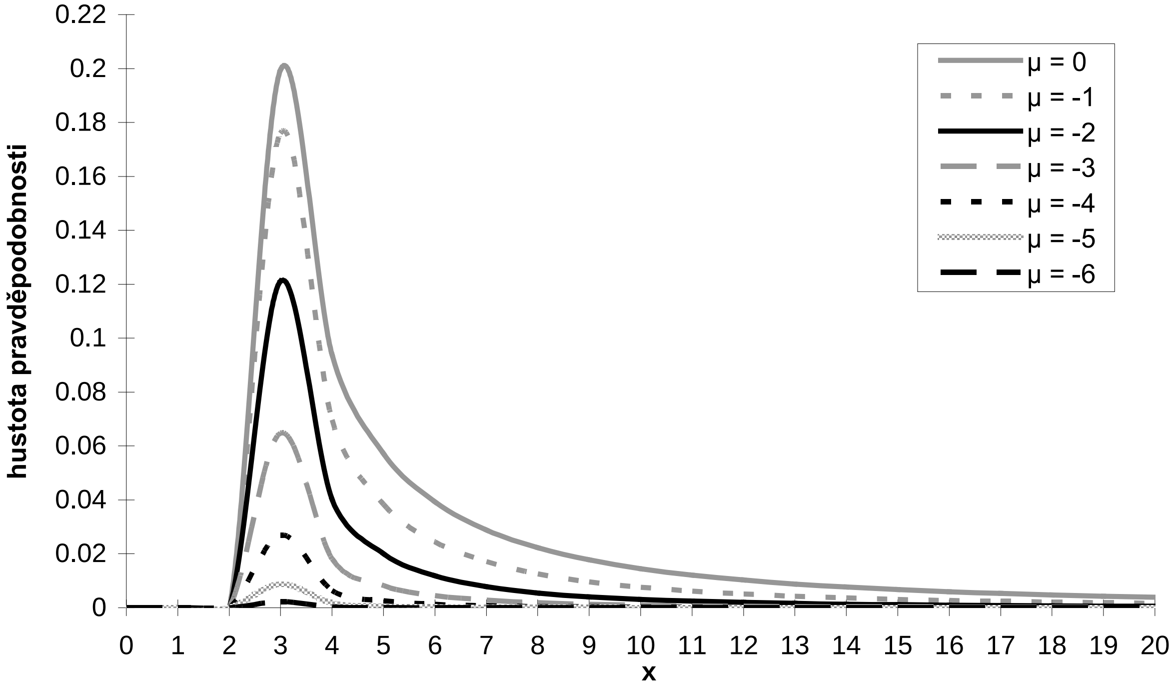
má normované normální rozdělení.

Obrázek č. 4: Hustota pravděpodobnosti tříparametrického lognormálního rozdělení pro hodnoty parametrů σ = 2 (σ^2 = 4); θ = 2



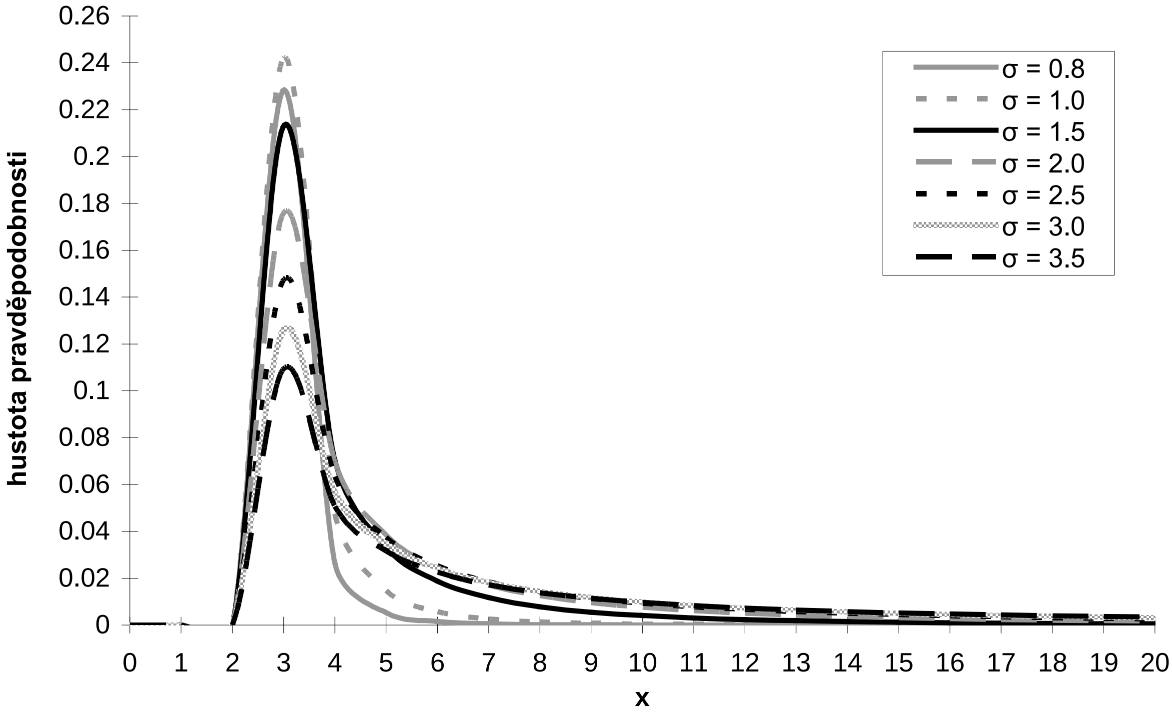
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 5: Hustota pravděpodobnosti tříparametrického lognormálního rozdělení pro hodnoty parametrů σ = 2 (σ^2 = 4); θ = 2



Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 6: Hustota pravděpodobnosti tříparametrického lognormálního rozdělení pro hodnoty parametrů μ = −1; θ = 2



Zdroj: vlastní konstrukce

Parametr μ tedy představuje střední hodnotu náhodné veličiny (5) a parametr σ^2 je rozptyl této náhodné veličiny. Parametr θ je počátek lognormálního rozdělení (teoretické minimum).

2.3 Kvantilová metoda bodového odhadu parametrů pro čtyřparametrické lognormální rozdělení

Předpokládáme, že známe parametr θ z důvodu existence institutu minimální mzdy. Jak již bylo uvedeno, náhodná veličina (2) má normální rozdělení s parametry μ a σ^2. 100 * P% kvantil normálního rozdělení s parametry μ a σ^2 má tvar:

$$x_P = \mu + \sigma u_P, \tag{7}$$

kde u_P je 100*P% kvantil normovaného normálního rozudělení. Pro medián normovaného normálního rozdělení platí, že $u_{0.50} = 0$.

Celkem odhadujeme tři parametry čtyřparametrového lognormálního rozdělení (parametr θ je známý jako minimální mzda), takže potřebujeme soustavu tří kvantilových rovnic. Nechť $x_{0,25}$ představuje dolní kvartil, $x_{0,50}$ představuje medián a $x_{0,75}$ představuje horní kvartil čtyřparametrického lognormálního rozdělení, $y_{0,25}$ je dolní kvartil, $y_{0,50}$ je medián a $y_{0,75}$ je horní kvartil normálního rozdělení s parametry μ a σ^2. Teoretické kvartily lognormálního rozdělení odhadneme odpovídajícími výběrovými kvartily. Analogicky, $u_{0,25}$ je dolní kvartil, $u_{0,50}$ je medián a $u_{0,75}$ je horní kvartil normovaného normálního rozdělení. Pak s ohledem na symetrii hustoty pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení podle nuly platí vztah $u_{0,25} = -u_{0,75}$. Získáváme soustavu tří kvantilových rovnic:

$$y_{0,25} = \ln \frac{x_{0,25} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,25}} = \hat{\mu} + \hat{\sigma} u_{0,25} = \hat{\mu} - \hat{\sigma} u_{0,75}, \tag{8}$$

$$y_{0,50} = \ln \frac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}} = \hat{\mu} + \hat{\sigma} u_{0,50} = \hat{\mu}, \tag{9}$$

$$y_{0,75} = \ln \frac{x_{0,75} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,75}} = \hat{\mu} + \hat{\sigma} u_{0,75}. \tag{10}$$

Rovnici (9) vložíme do rovnic (8) a (10), čímž se soustava tří rovnic zredukuje na soustavu rovnic dvou. Získáváme:

$$\ln \frac{x_{0,25} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,25}} = \ln \frac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}} - \hat{\sigma} u_{0,75}, \tag{11}$$

$$\ln \frac{x_{0,75} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,75}} = \ln \frac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}} + \hat{\sigma} u_{0,75}. \tag{12}$$

Úpravou získáváme:

$$\hat{\sigma} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}} - \ln \dfrac{x_{0,25} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,25}}}{u_{0,75}}, \tag{13}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,75} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,75}} - \ln \dfrac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}}}{u_{0,75}}. \tag{14}$$

Získáváme jednu rovnici s jedním neznámým parametrem τ:

$$\hat{\sigma} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}} - \ln \dfrac{x_{0,25} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,25}}}{u_{0,75}} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,75} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,75}} - \ln \dfrac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}}}{u_{0,75}}, \tag{15}$$

takže:

$$\ln \frac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}} - \ln \frac{x_{0,25} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,25}} = \ln \frac{x_{0,75} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,75}} - \ln \frac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}}. \tag{16}$$

Tudíž:

$$\begin{aligned} &\ln(x_{0,50} - \theta) - \ln(\hat{\tau} - x_{0,50}) - \ln(x_{0,25} - \theta) + \ln(\hat{\tau} - x_{0,25}) = \\ &= \ln(x_{0,75} - \theta) - \ln(\hat{\tau} - x_{0,75}) - \ln(x_{0,50} - \theta) + \ln(\hat{\tau} - x_{0,50}), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\ln \frac{(\hat{\tau} - x_{0,25})(\hat{\tau} - x_{0,75})}{(\hat{\tau} - x_{0,50})(\hat{\tau} - x_{0,50})} = \ln \frac{(x_{0,25} - \theta)(x_{0,75} - \theta)}{(x_{0,50} - \theta)(x_{0,50} - \theta)}, \tag{18}$$

$$\frac{(\hat{\tau} - x_{0,25})(\hat{\tau} - x_{0,75})}{(\hat{\tau} - x_{0,50})^2} = \frac{(x_{0,25} - \theta)(x_{0,75} - \theta)}{(x_{0,50} - \theta)^2}. \tag{19}$$

Spočítáme konstantu *C:*

$$C = \frac{(x_{0,25} - \theta)(x_{0,75} - \theta)}{(x_{0,50} - \theta)^2}, \tag{20}$$

takže:

$$\frac{(\hat{\tau} - x_{0,25})(\hat{\tau} - x_{0,75})}{(\hat{\tau} - x_{0,50})^2} = C. \tag{21}$$

Získáváme kvadratickou rovnici:

$$(1-C)\,\hat{\tau}^2 + (2C\,x_{0,50} - x_{0,25} - x_{0,75})\,\hat{\tau} - C\,x_{0,50}^2 + x_{0,25}\cdot x_{0,75} = 0. \tag{22}$$

Získáváme kvantilový odhad parametru τ:

$$\hat{\tau} = \frac{-(2C\,x_{0,50} - x_{0,25} - x_{0,75}) + \sqrt{(2C\,x_{0,50} - x_{0,25} - x_{0,75})^2 + 4(1-C)(C\,x_{0,50}^2 - x_{0,25}\cdot x_{0,75})}}{2(1-C)}. \tag{23}$$

Kvantilové odhady všech tří neznámých parametrů čtyřparametrického lognormálního rozdělení mají tedy tvar:

$$\hat{\tau} = \frac{-(2C\,x_{0,50} - x_{0,25} - x_{0,75}) + \sqrt{(2C\,x_{0,50} - x_{0,25} - x_{0,75})^2 + 4(1-C)(C\,x_{0,50}^2 - x_{0,25}\cdot x_{0,75})}}{2(1-C)}, \tag{24}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}} - \ln \dfrac{x_{0,25} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,25}}}{u_{0,75}} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,75} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,75}} - \ln \dfrac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}}}{u_{0,75}}, \tag{25}$$

$$\hat{\mu} = \ln \frac{x_{0,50} - \theta}{\hat{\tau} - x_{0,50}}, \tag{26}$$

kde konstanta *C* je určena vztaherm (17).

2.4 Kvantilová metoda bodového odhadu parametrů pro tříparametrické lognormální rozdělení

Kvantilový odhad parametrů v případě tříparametrického lognormálního rozdělení je výrazně jednodušší. Opět předpokládáme, že parametr θ známe z důvodu existence institutu minimální mzdy.

Jak je uvedeno výše, náhodná veličina (5) má normální rozdělení s parametry μ a σ^2. Získáváme soustavu dvou kvantilových rovnic:

$$y_{0,50} = \ln(x_{0,50} - \theta) = \hat{\mu} + \hat{\sigma} u_{0,50} = \hat{\mu}, \tag{27}$$

$$y_{0,75} = \ln(x_{0,75} - \theta) = \hat{\mu} + \hat{\sigma} u_{0,75}. \tag{28}$$

Rovnici (24) vložíme do rovnice (25), čímž se systém dvou rovnic zredukuje na jednu rovnici. Získáváme rovnici:

$$\ln(x_{0,75} - \theta) = \ln(x_{0,50} - \theta) + \hat{\sigma} u_{0,75}. \tag{29}$$

Tudíž:

$$\hat{\sigma} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,75} - \theta}{x_{0,50} - \theta}}{u_{0,75}}. \tag{30}$$

Kvantilové odhady obou neznámých parametrů tříparametrického lognormálního rozdělení mají tedy tvar:

$$\hat{\sigma} = \frac{\ln \dfrac{x_{0,75} - \theta}{x_{0,50} - \theta}}{u_{0,75}}, \tag{31}$$

$$\hat{\mu} = \ln(x_{0,50} - \theta). \tag{32}$$

3. VÝSLEDKY

Tabulka č. 3 uvádí výběrové kvartily mzdových rozdělení použité k odhadu parametrů čtyřparametrických lognormálních křivek pro mzdové intervaly o šířce 5 000 Kč, přičemž počátek těchto křivek představuje minimální mzda v daném roce. Výběrové horní kvartily a mediány z tabulky č. 3 jsou potom rovněž použity k odhadu parametrů tříparametrických lognormálních křivek pro mzdové intervaly opět se šířkou 5 000 Kč, přičemž minimální mzda v daném roce představuje rovněž počátek těchto křivek. Tabulka č. 3 ukazuje nejnižší úroveň mezd pro nejmenší podniky s méně než 10 zaměstnanci. Úroveň mezd se pak zvyšuje s velikostí společnosti až na 1 000 – 4 999 zaměstnanců, kde dosahuje svého vrcholu. Úroveň mzdy se s růstem počtu zaměstnanců pro podniky s 5 000 a více zaměstnanci dále již zásadně nemění.

Tabulka č. 4 představuje odhady parametrů pro čtyřparametrové lognormální křivky představující modely mzdových rozdělení a tabulka č. 5 zobrazuje odhady parametrů pro tříparametrové lognormální křivky jako modely mzdových rozdělení.

Obrázky č. 7 – 11 představují čtyřparametrové modely mzdových rozdělení v období let 2014 – 2018. Tato obrázky ukazují změnu tvaru modelů rozdělení mezd s růstem velikosti podniku, zatímco tvar modelů rozdělení mezd je jasně odlišný pro nejmenší podniky s méně než 10 zaměstnanci. Obrázky č. 12 – 16 představují tříparametrové modely mzdových rozdělení v období let 2014 – 2018. Z těchto obrázků je rovněž patrný jasný rozdíl ve tvaru modelů rozdělení mezd pro nejmenší podniky s méně než 10 zaměstnanci.

Tabulka č. 3: Výběrové kvartily mzdových rozdělení (v Kč) v období let 2014 – 2018

Rok	Velikost jednotky	Kvartily		
		Dolní kvartil	Medián	Horní kvartil
2014	méně než 10 zaměstnanců	9 385	15 177	20 478
	od 10 do 49 zaměstnanců	15 301	21 659	28 297
	od 50 do 249 zaměstnanců	17 434	23 161	30 411
	od 250 do 999 zaměstnanců	19 005	24 763	32 972
	od 1000 do 4 999 zaměstnanců	21 113	27 647	36 836
	od 5 000 zaměstnanců	21 120	27 285	36 246
2015	méně než 10 zaměstnanců	9 683	15 493	21 268
	od 10 do 49 zaměstnanců	15 803	22 630	29 752
	od 50 do 249 zaměstnanců	18 043	23 954	31 335
	od 250 do 999 zaměstnanců	20 025	25 990	34 933
	od 1000 do 4 999 zaměstnanců	22 065	28 887	38 227
	od 5 000 zaměstnanců	21 693	28 419	37 577
2016	méně než 10 zaměstnanců	10 003	15 949	22 286
	od 10 do 49 zaměstnanců	16 698	23 645	30 826
	od 50 do 249 zaměstnanců	19 043	25 235	33 138
	od 250 do 999 zaměstnanců	21 086	27 112	36 506
	od 1000 do 4 999 zaměstnanců	23 325	30 071	39 332
	od 5 000 zaměstnanců	22 910	29 636	38 641
2017	méně než 10 zaměstnanců	12 941	16 696	24 019
	od 10 do 49 zaměstnanců	18 239	25 028	32 481
	od 50 do 249 zaměstnanců	20 664	27 050	35 639
	od 250 do 999 zaměstnanců	22 844	29 179	38 473
	od 1000 do 4 999 zaměstnanců	25 240	32 118	42 794
	od 5 000 zaměstnanců	24 949	32 355	43 814
2018	méně než 10 zaměstnanců	14 412	18 120	24 758
	od 10 do 49 zaměstnanců	19 983	27 442	36 036
	od 50 do 249 zaměstnanců	22 729	29 553	38 126
	od 250 do 999 zaměstnanců	24 847	31 496	41 645
	od 1000 do 4 999 zaměstnanců	27 540	35 281	47 265
	od 5 000 zaměstnanců	27 430	35 923	48 498

Zdroj: vlastní výpočet

Tabulka č. 6 ukazuje vypočtené hodnoty testového kritéria chí-kvadrát pro čtyřparametrové a tříparametrové lognormální křivky. Z této tabulky vidíme, že ve většině případů jsou hodnoty testového kritéria chí-kvadrát pro čtyřparametrové křivky o něco menší než pro křivky se třemi parametry. Ve většině případů však tento rozdíl není příliš zásadní. Hodnota kritéria chí-kvadrát testu je stejná pro čtyřparametrové lognormální křivky a tříparametrové lognormální křivky pouze pro šest z třiceti modelů mzdových rozdělení.

Lze tedy konstatovat, že čtyřparametrové lognormální křivky poskytovaly mírně přesnější modely rozdělení mezd než tříparametrové lognormální křivky.

Rozlišujeme k = 10 intervalů v případě všech mzdových rozdělení. V případě čtyřparametrového lognormálního rozdělení odhadujeme p = 3 parametry a v případě tříparametrového lognormálního rozdělení p = 2 parametry. Počátek čtyřparametrických a tříparametrických lognormálních křivek představuje minimální mzda v daném roce, tedy tento parametr považujeme za známý. Za předpokladu, že platí nulová hypotéza o předpokládaném lognormálním rozdělení, má testové kritérium chí-kvadrát asymptoticky chí-kvadrát rozdělení o ν = $k - p - 1$ stupních volnosti. Odtud ν = 6 v případě čtyřparametrického lognormálního rozdělení a ν = 7 v případě tříparametrického lognormálního rozdělení. Tabulka č. 7 obsahuje kritické hodnoty pro chí-kvadát testy při hladině významnosti α = 0,05 (0,01 nebo 0,10).

Z tabulek č. 6 a 7 je zřejmé, že test vede k odmítnutí nulové hypotézy předpokládající čtyřparametrické nebo tříparametrické lognormálního rozdělení hrubé měsíční mzdy ve všech třiceti případech mzdových rozdělení a na všech uvažovaných hladinách významnosti (5 %, 1 % a 10 %). Ve všech případech tedy vede test k přijetí alternativní hypotézy, že rozdělení hrubé měsíční mzdy je jiné, než předpokládá nulová hypotéza.

Tabulka č. 4: Odhady parametrů čtyřparametrických lognormálních křivek

Rok	Velikost jednotky	Odhad parametrů			
		$\hat{\theta}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
2014	méně než 10 zam.	8 500	252 109 171	-10,538881	0,866471
	od 10 do 49 zam.	8 500	1 945 849 366	-11,904105	0,605534
	od 50 do 249 zam.	8 500	5 937 914 943	-12,911655	0,595708
	od 250 do 999 zam.	8 500	22 372 565 586	-14,134463	0,605886
	od 1 000 do 4 999 zam.	8 500	30 923 935 022	-14,294882	0,581146
	od 5 000 zam.	8 500	98 945 504 568	-15,476995	0,578248
2015	méně než 10 zam.	9 200	241 484 561	-10,555067	0,965431
	od 10 do 49 zam.	9 200	1 898 823 320	-11,859251	0,630811
	od 50 do 249 zam.	9 200	5 609 449 752	-12,848465	0,601470
	od 250 do 999 zam.	9 200	59 014 840 613	-15,072512	0,633039
	od 1 000 do 4 999 zam.	9 200	23 129 037 957	-13,976636	0,575665
	od 5 000 zam.	9 200	20 263 998 342	-13,868474	0,577748
2016	méně než 10 zam.	9 900	230 978 158	-10,550185	1,062661
	od 10 do 49 zam.	9 900	2 084 191 626	-11,929221	0,623184
	od 50 do 249 zam.	9 900	6 537 123 265	-12,962867	0,616272
	od 250 do 999 zam.	9 900	15 486 387 102	-13,709881	0,645742
	od 1 000 do 4 999 zam.	9 900	31 820 624 721	-14,271378	0,560186
	od 5 000 zam.	9 900	22 138 140 437	-13,930369	0,557278
2017	méně než 10 zam.	11 000	1 406 155 571	-12,416549	1,225533
	od 10 do 49 zam.	11 000	2 824 251 278	-12,212725	0,631819
	od 50 do 249 zam.	11 000	9 733 682 516	-13,315383	0,635494
	od 250 do 999 zam.	11 000	57 164 360 790	-14,961164	0,612218
	od 1 000 do 4 999 zam.	11 000	70 874 611 882	-15,026309	0,606628
	od 5 000 zam.	11 000	83 974 032 655	-15,184714	0,636859
2018	méně než 10 zam.	12 200	1 721 507 593	-12,580327	1,114949
	od 10 do 49 zam.	12 200	3 573 818 184	-12,365081	0,662954
	od 50 do 249 zam.	12 200	9 266 487 217	-13,188130	0,595232
	od 250 do 999 zam.	12 200	23 899 457 061	-14,029485	0,626610
	od 1 000 do 4 999 zam.	12 200	56 855 677 303	-14,896147	0,626309
	od 5 000 zam.	12 200	75 318 226 791	-14,970803	0,630582

Zdroj: vlastní výpočet

Tabulka č. 5: Odhady parametrů tříparametrických lognormálních křivek

Rok	Velikost jednotky	$\hat{\theta}$	Odhad parametrů $\hat{\mu}$	Odhad parametrů $\hat{\sigma}$
2014	méně než 10 zaměstnanců	8 500	8,806432	0,866440
	od 10 do 49 zaměstnanců	8 500	9,484848	0,605529
	od 50 do 249 zaměstnanců	8 500	9,592965	0,595707
	od 250 do 999 zaměstnanců	8 500	9,696637	0,605885
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	8 500	9,859914	0,581146
	od 5 000 zaměstnanců	8 500	9,840840	0,578248
2015	méně než 10 zaměstnanců	9 200	8,747185	0,965396
	od 10 do 49 zaměstnanců	9 200	9,505238	0,630806
	od 50 do 249 zaměstnanců	9 200	9,599250	0,601468
	od 250 do 999 zaměstnanců	9 200	9,728543	0,633039
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	9 200	9,887718	0,575664
	od 5 000 zaměstnanců	9 200	9,863637	0,577748
2016	méně než 10 zaměstnanců	9 900	8,707580	1,062620
	od 10 do 49 zaměstnanců	9 900	9,528415	0,623179
	od 50 do 249 zaměstnanců	9 900	9,637892	0,616270
	od 250 do 999 zaměstnanců	9 900	9,753345	0,645741
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	9 900	9,912002	0,560185
	od 5 000 zaměstnanců	9 900	9,890198	0,557278
2017	méně než 10 zaměstnanců	11 000	8,647558	1,225524
	od 10 do 49 zaměstnanců	11 000	9,548775	0,631815
	od 50 do 249 zaměstnanců	11 000	9,683472	0,635493
	od 250 do 999 zaměstnanců	11 000	9,808032	0,612218
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	11 000	9,957869	0,606628
	od 5 000 zaměstnanců	11 000	9,969059	0,636859
2018	méně než 10 zaměstnanců	12 200	8,686112	1,114938
	od 10 do 49 zaměstnanců	12 200	9,631811	0,662950
	od 50 do 249 zaměstnanců	12 200	9,761537	0,595231
	od 250 do 999 zaměstnanců	12 200	9,867635	0,626609
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	12 200	10,046775	0,620002
	od 5 000 zaměstnanců	12 200	10,074184	0,630581

Zdroj: vlastní výpočet

Otázka vhodnosti dané křivky pro model rozdělení mzdy v tomto případě není běžným matematicko-statistickým problémem, ve kterém testujeme nulovou hypotézu.

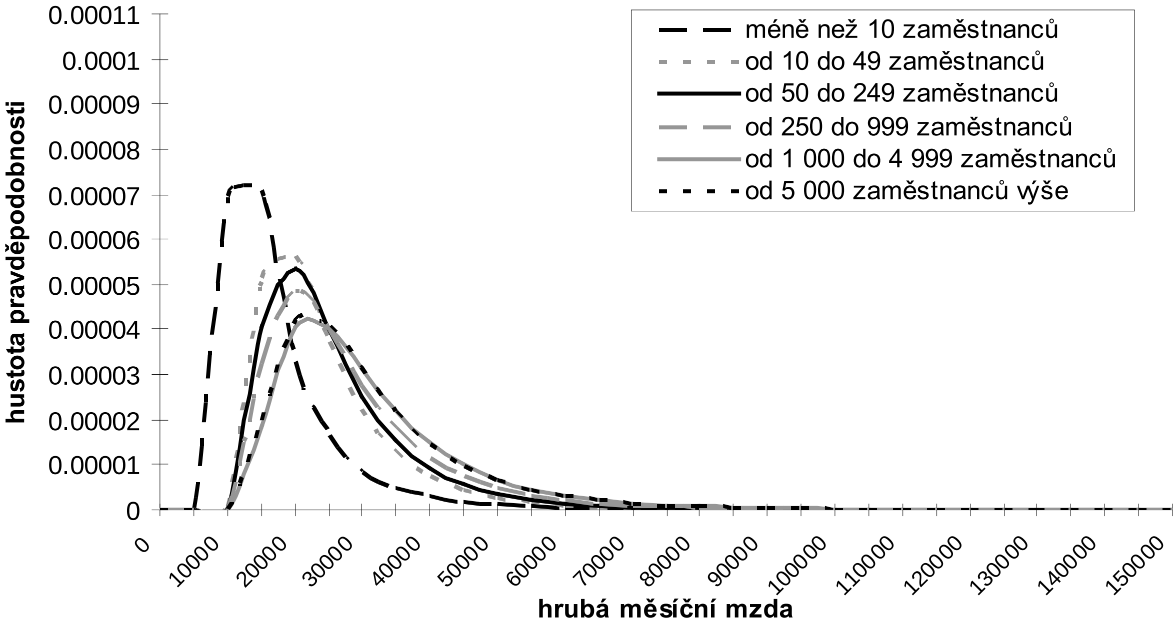
H_0: Výběr pochází z předpokládaného teoretického lognormálního rozdělení

proti alternativní hypotéze:

H_1: non H_0,

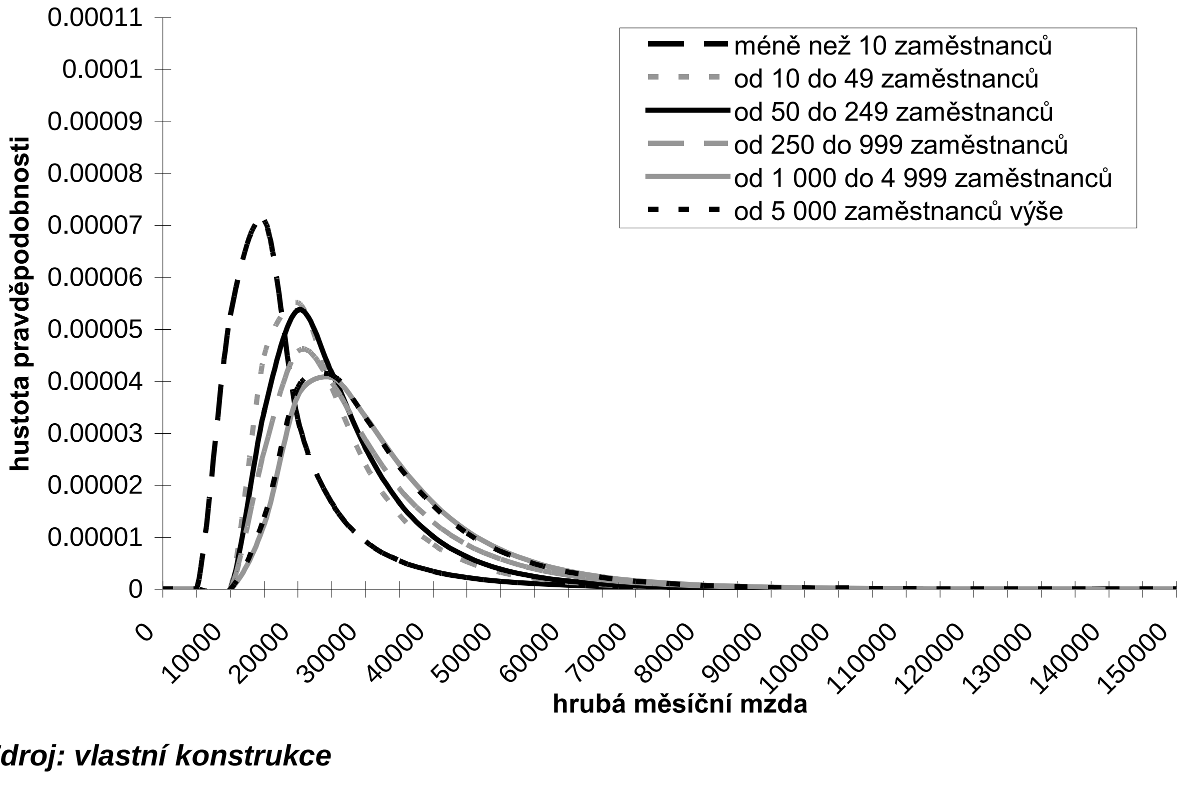
neboť při testech dobré shody se v případech mzdových rozdělení setkáváme se skutečností, že pracujeme s výběry velkého rozsahu, a proto by test téměř vždy vedl k zamítnutí nulové hypotézy o předpokládaném tvaru rozdělení. Vyplývá to nejen z faktu, že při takto velkých rozsazích výběrů je při zvolené hladině významnosti tak velká síla testu, že test odkryje sebenepatrnější odchylky skutečného mzdového rozdělení a modelu, ale rovněž ze samotného principu konstrukce testu. Malé odchylky nás ale prakticky nezajímají, proto postačí pouze přibližná shoda modelu se skutečností a model (křivku) si tzv. vypůjčíme. Testové kritérium chí-kvadrát lze v tomto směru použít pouze orientačně. Při vyhodnocování vhodnosti modelu je třeba postupovat do značné míry subjektivně a opírat se o logický rozbor a zkušenost.

Obrázek č. 7: Čtyřparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2014 (hrubá měsíční mzda v Kč)



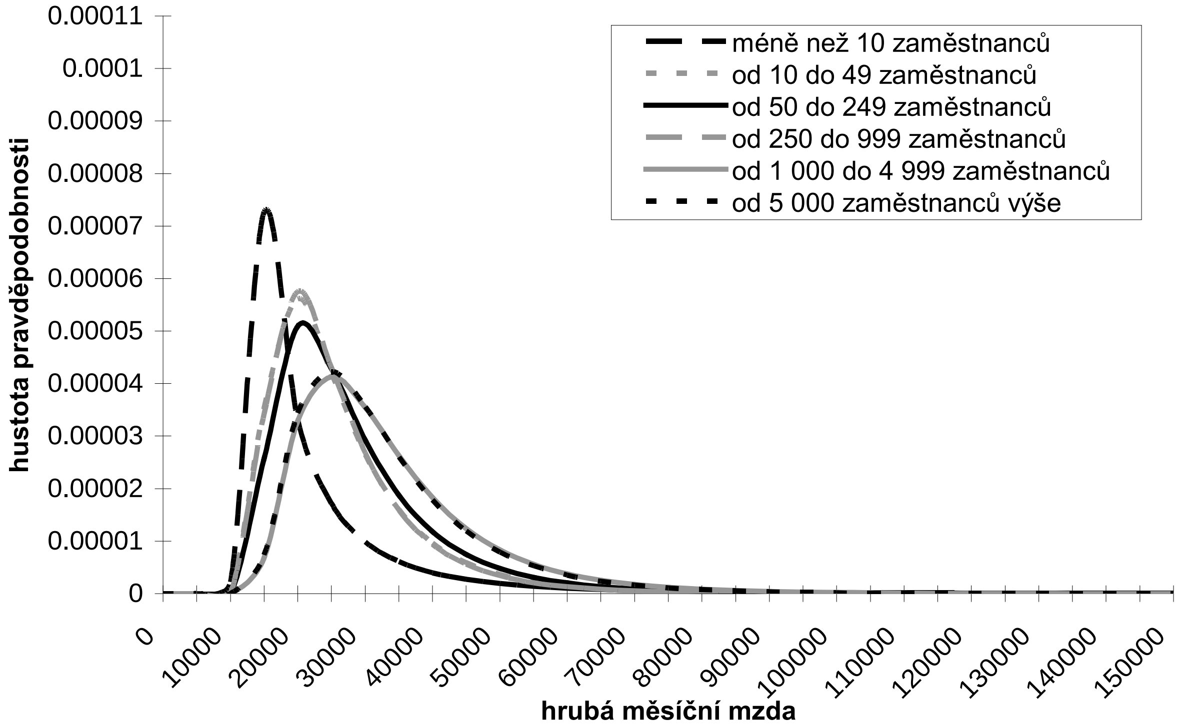
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 8: Čtyřparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2015 (hrubá měsíční mzda v Kč)



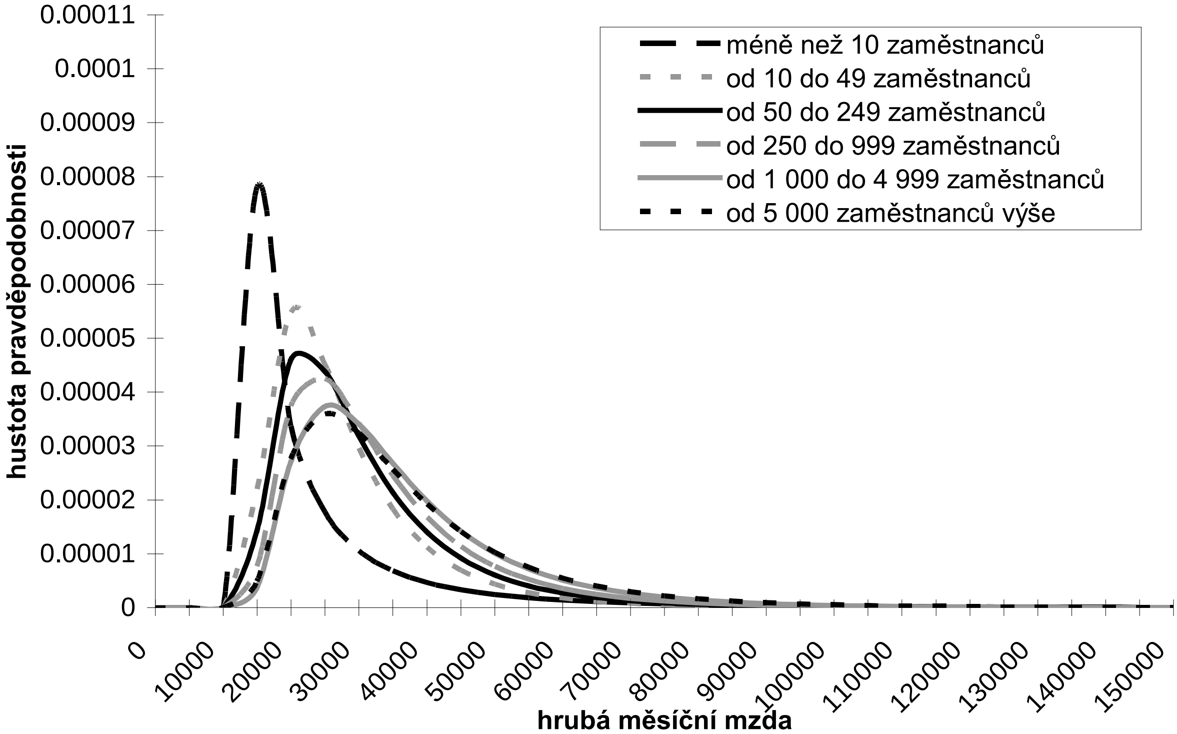
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 9: Čtyřparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2016 (hrubá měsíční mzda v Kč)



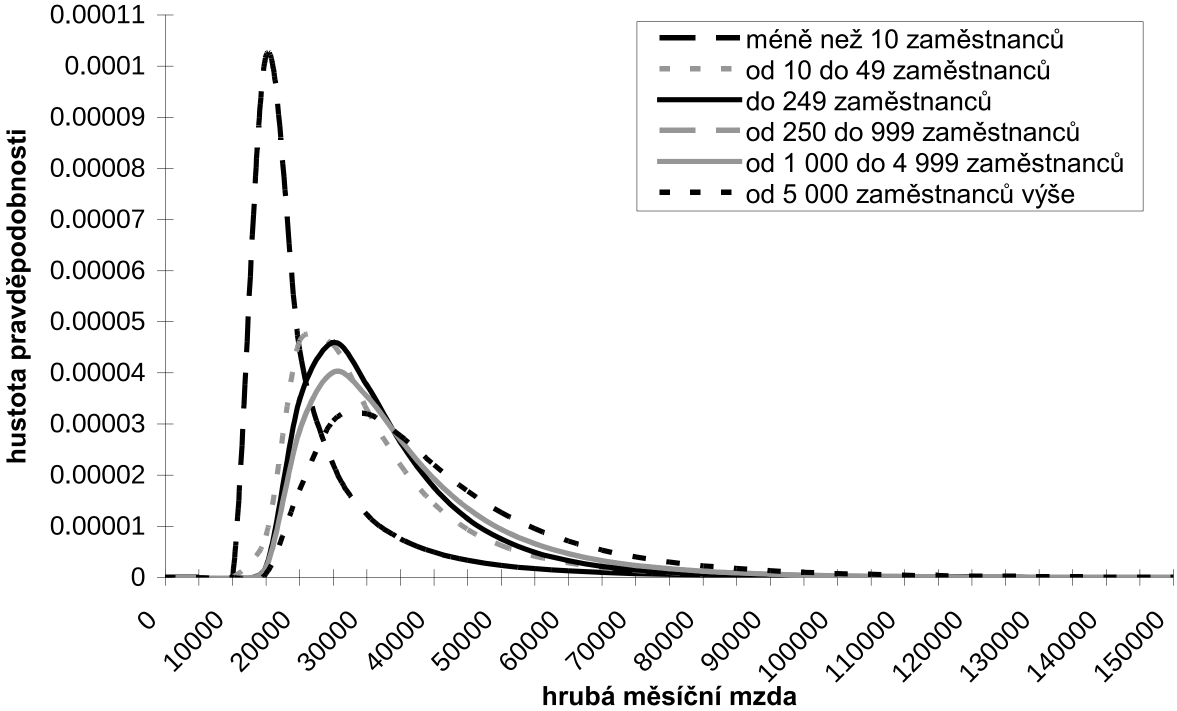
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 10: Čtyřparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2017 (hrubá měsíční mzda v Kč)



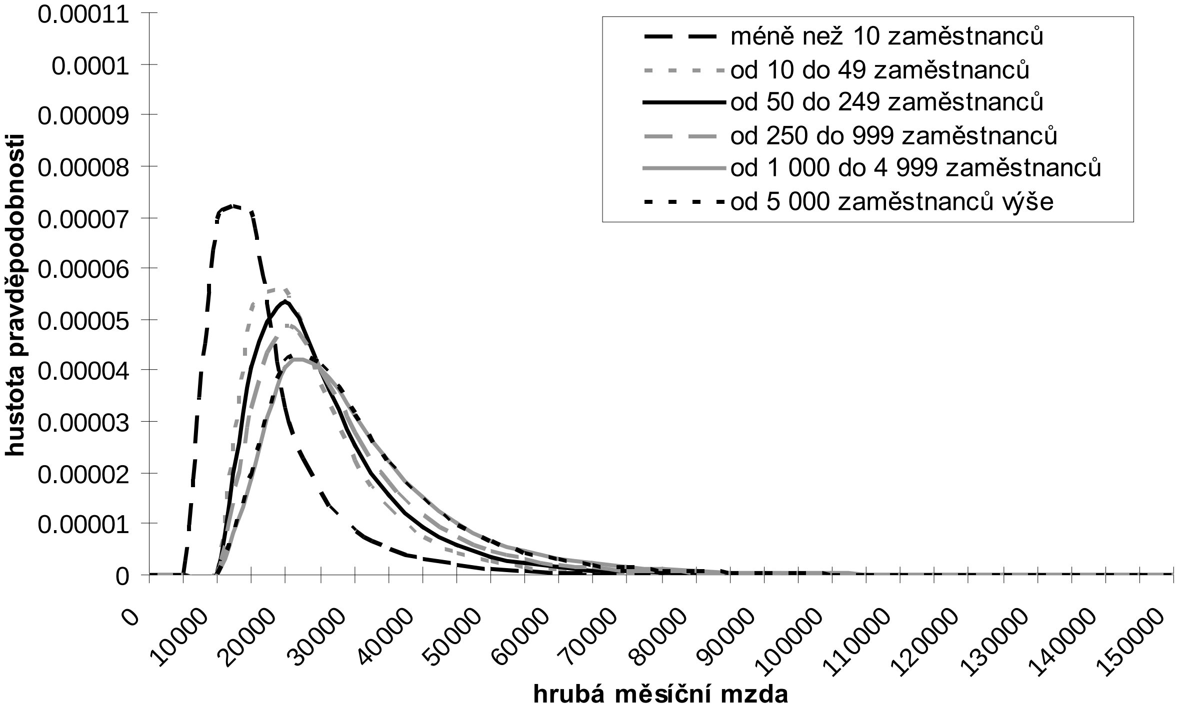
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 11: Čtyřparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2018 (hrubá měsíční mzda v Kč)



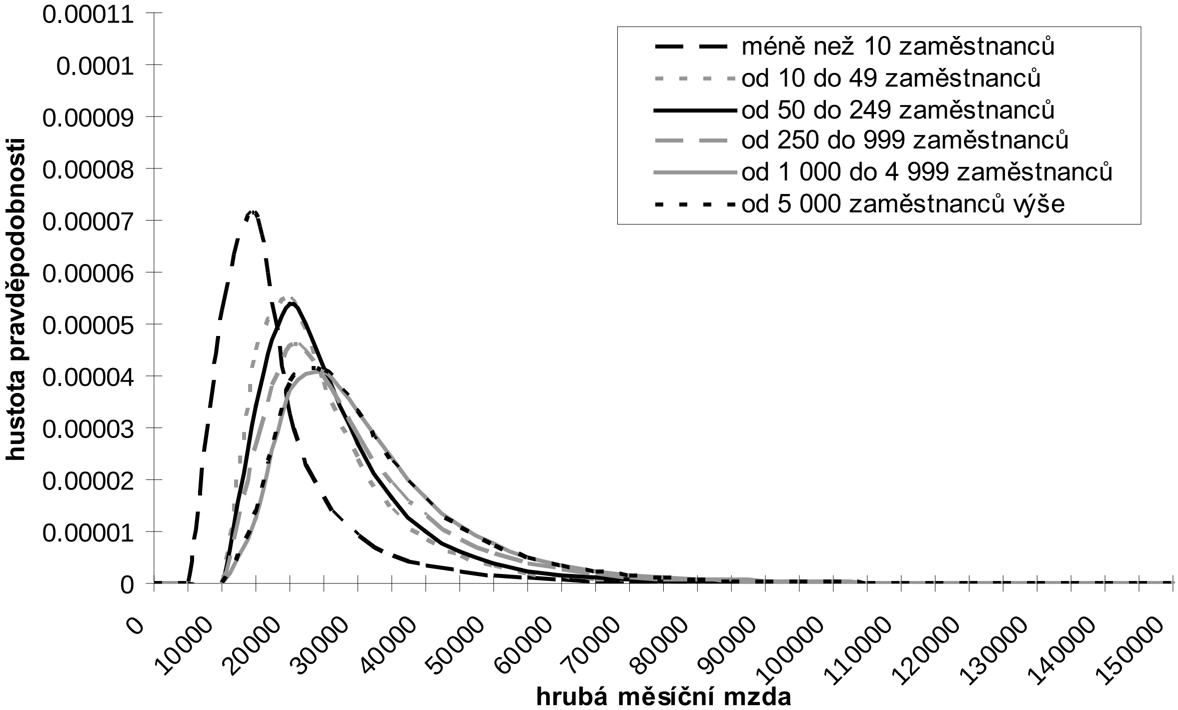
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 12: Tříparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2014 (hrubá měsíční mzda v Kč)



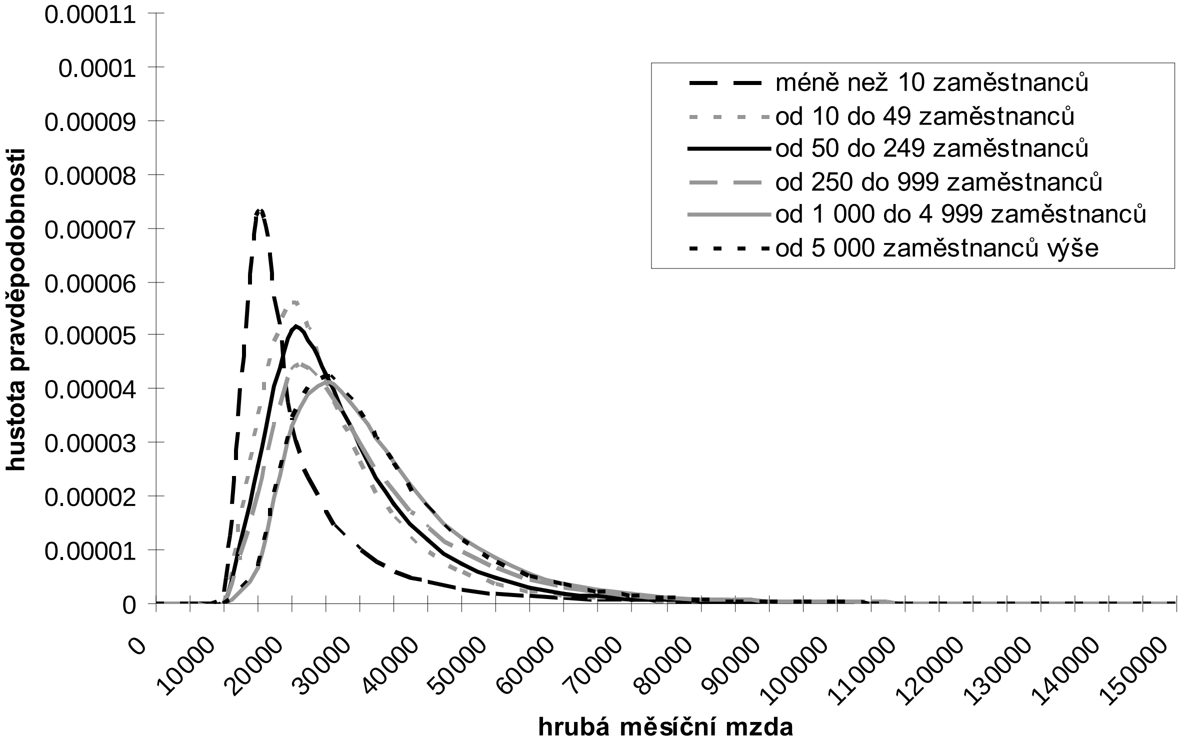
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 13: Tříparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2015 (hrubá měsíční mzda v Kč)



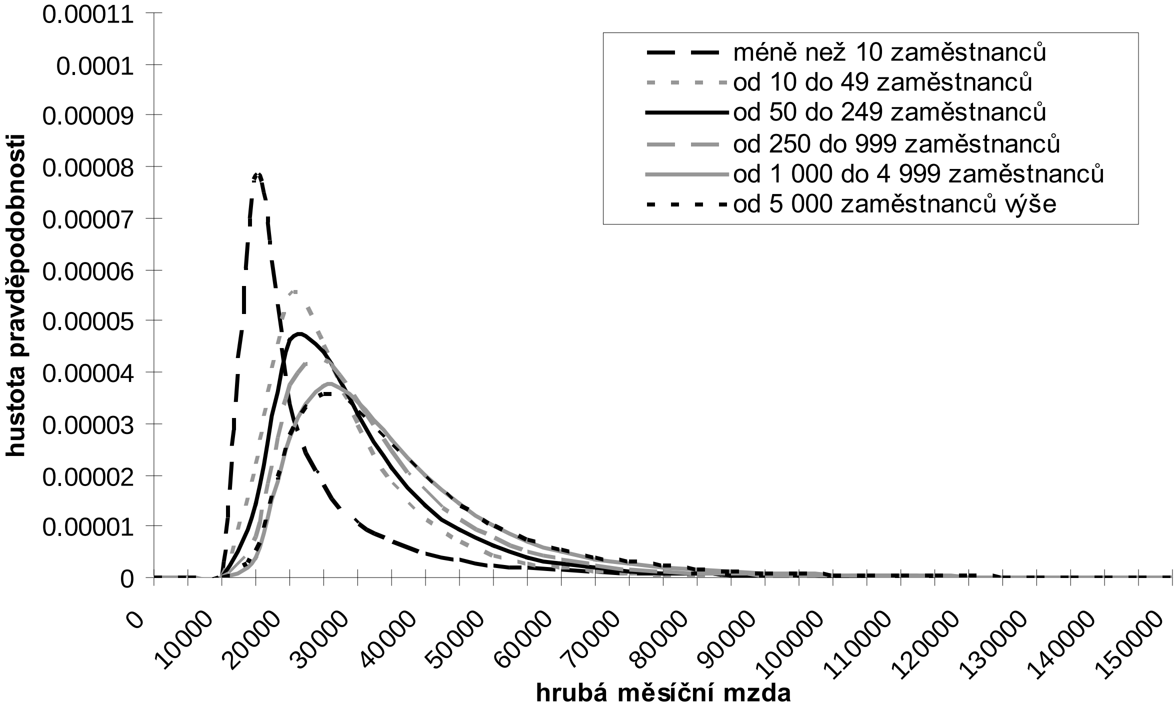
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 14: Tříparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2016 (hrubá měsíční mzda v Kč)



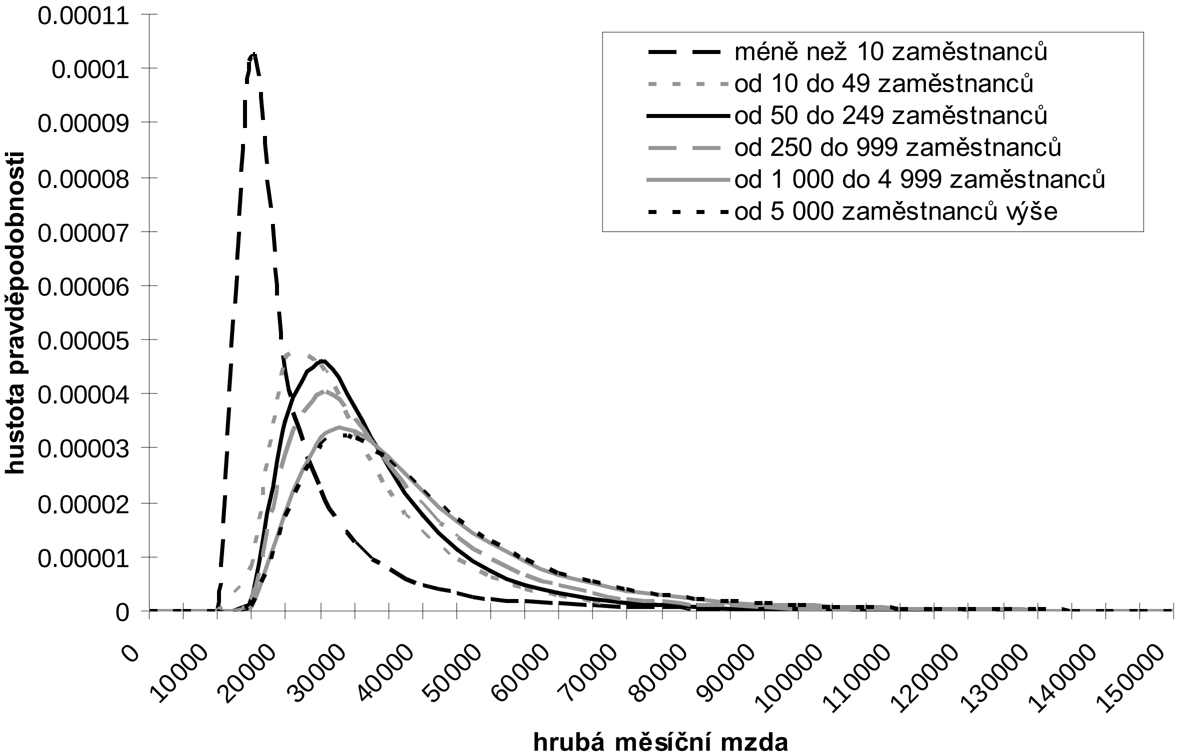
Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 15: Tříparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2017 (hrubá měsíční mzda v Kč)



Zdroj: vlastní konstrukce

Obrázek č. 16: Tříparametrické lognormální modely rozdělení hrubé měsíční mzdy podle velikosti jednotky v roce 2018 (hrubá měsíční mzda v Kč)



Zdroj: vlastní konstrukce

Tabulka č. 6: Hodnoty testového kritéria chí-kvadrát

Rok	Velikost jednotky	Hodnoty testového kritéria	
		Čtyřparametrické rozdělení	Tříparametrické rozdělení
2014	méně než 10 zaměstnanců	52 701	52 706
	od 10 do 49 zaměstnanců	585 678	585 695
	od 50 do 249 zaměstnanců	323 095	323 095
	od 250 do 999 zaměstnanců	201 282	201 284
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	361 967	361 967
	od 5 000 zaměstnanců	7 000	7 000
2015	méně než 10 zaměstnanců	79 541	79 549
	od 10 do 49 zaměstnanců	1 017 368	1 017 406
	od 50 do 249 zaměstnanců	698 039	698 056
	od 250 do 999 zaměstnanců	307 522	307 522
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	1 547 992	1 548 024
	od 5 000 zaměstnanců	39 217	39 218
2016	méně než 10 zaměstnanců	125 904	125 917
	od 10 do 49 zaměstnanců	2 874 134	2 874 287
	od 50 do 249 zaměstnanců	1 626 050	1 626 090
	od 250 do 999 zaměstnanců	622 184	622 194
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	2 818 638	2 818 722
	od 5 000 zaměstnanců	388 759	388 759
2017	méně než 10 zaměstnanců	99 243	99 247
	od 10 do 49 zaměstnanců	64 213 482	64 218 766
	od 50 do 249 zaměstnanců	20 721 610	20 721 977
	od 250 do 999 zaměstnanců	62 788 256	62 788 391
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	20 025 793	20 025 801
	od 5 000 zaměstnanců	511 089	511 090
2018	méně než 10 zaměstnanců	25 847	25 855
	od 10 do 49 zaměstnanců	869 035	869 061
	od 50 do 249 zaměstnanců	1 144 144	1 144 153
	od 250 do 999 zaměstnanců	401 253	401 258
	od 1 000 do 4 999 zaměstnanců	83 433	83 440
	od 5 000 zaměstnanců	21 705	21 705

Zdroj: vlastní výpočet

Tabulka č. 7: Kritické obory na hladině významnosti α = 0,05 (0,01 or 0,10)

α	Four-parameter lognormal distribution	Three-parameter lognormal distribution
0,05	$W\alpha = \{\chi^2: \chi^2 \geq 12{,}592\}$	$W\alpha = \{\chi^2: \chi^2 \geq 14{,}067\}$
0,01	$W\alpha = \{\chi^2: \chi^2 \geq 16{,}812\}$	$W\alpha = \{\chi^2: \chi^2 \geq 18{,}475\}$
0,10	$W\alpha = \{\chi^2: \chi^2 \geq 10{,}645\}$	$W\alpha = \{\chi^2: \chi^2 \geq 12{,}017\}$

Zdroj: vlastní výpočet

4. ZÁVĚR

Na základě testového kritéria chí-kvadrát poskytly v rámci bodového odhadu parametrů s využitím kvantilové metody čtyřparametrické lognormální křivky poněkud přesnější modely rozdělení mezd než tříparametrické lognormální křivky v naprosté většině mzdových rozdělení. Čtyřparametrické a tříparametrické lognormální křivky přinesly přibližně stejně přesné výsledky pouze v šesti z třiceti mzdových rozdělení.

Tříparametrické lognormální křivky nebyly přesnější než čtyřparametrické lognormální křivky v žádném z 30 případů.

Z teorie i praktických aplikací je všeobecně zřejmé, že přidání dalšího parametru do modelu vede prakticky vždy k vyšší přesnosti modelu. V uvedeném případě čtyřparametrických lognormálních křivek se jedná o horní omezení mzdových modelů, což v tomto případě může být kladným přínosem. Obecně, přidáním dalšího parametru do modelu se však rovněž jedná vždy o složitější model než původní model bez přidaného parametru. Jde tedy o kompromis, zda upřednostníme vyšší přesnost modelu nebo jeho jednodušší verzi. Otázkou tedy zůstává, do jaké míry musí přidání dalšího parametru do modelu zvýšit přesnost tohoto modelu, abychom upřednostnili složitější model. V daném případě mzdových rozdělení nejsou čtyřparametrické lognormální křivky markantně přesnější než křivky tříparametrické, tudíž pro modely mzdových rozdělení postačí zůstat u tříparametrického rozdělení.

Význam lognormálního rozdělení od dvouparametrické až po čtyřparametrickou verzi jako modelu pro výběrová rozdělení nelze zpochybňovat. K tomuto účelu je třeba vždy vybrat některou z metod bodového odhadu parametrů, v rámci této analýzy byla pozornost věnována kvantilové metodě. Výsledky této analýzy lze využít v ekonomické oblasti především při modelování mzdových a příjmových rozdělení nebo jako modely výše škod v rámci neživotního pojištění. Kromě ekonomické oblasti jsou získané výsledky použitelné v celé řadě dalších oblastí počínaje astronomií, přes techniku, přírodní vědy až po sociologii a další obory, kde lognormální rozdělení nachází uplatnění. Charakteristickými vlastnostmi procesu vystihovaného lognormálním modelem je postupné účinkování vzájemně závislých faktorů, tendence k vývoji v geometrické posloupnosti a přerůstání náhodné variability ve variabilitu systematickou, tj. diferenciace.

Poděkování
Tento příspěvek byl zpracován za podpory prostředků dlouhodobého koncepčního rozvoje vědy a výzkumu číslo IP400040 na Fakultě informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze.

LITERATURA

[1] JOHNSON, N. L. – KOTZ, S. – BALAKRISHNAN, N.: Continuous Univariate Distributions. Sec. Ed. New York: Wiley-Interscience, 1994.
[2] LAMBERT, J. A.: Estimation of Parameters in the Four-Parameter Lognormal Distribution. In: Australian Journal of Statistics, 1970, č. 1, s. 33 – 43.
[3] McDONALD, J. B. – MANTRALA, A.: The Distribution of Personal Income: Revisited. In: Journal of Applied Econometrics, 1995, č. 2, 201 – 204.
[4] MORRISON, J.: The Lognormal Distribution in Quality Control. In: Journal of the Royal Statistical Society: Series C, 1958, č. 3, 160 – 172.
[5] SAVING, T. R.: The Four-Parameter Lognormal, Diseconomies of Scale and the Size Distribution of Manufacturing Establishments. In: International Economic Review, 1965, č. 1, 105 – 114.
[6] TAMMET, H. – KULMALA, M.: Performance of Four-Parameter Analytical Models of Atmospheric Aerosol Particle Size Distribution. In: Journal of Aerosol Science, 2014, č. 77, 145 – 157.

[7] WAGNER, L. E. – DING, D.: Representing Aggregate Size Distributions As Modified Lognormal Distributions. In: Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers, 1994, č. 3, 815 – 821.

RESUMÉ

Tento článek se zabývá konstrukcí modelů rozdělení mezd pomocí čtyřparametrových a tříparametrových lognormálních křivek. Hlavním cílem výzkumu je porovnat přesnost pomocí obou typů lognormálního rozdělení jako modelů rozdělení mezd. Hrubá měsíční nominální mzda je hlavní proměnnou výzkumu. Výsledky z hlediska přesnosti obou typů lognormálních křivek jsou přibližně stejné pouze v několika případech. Rozdíly však nejsou kritické. Kvantilová metoda odhadu parametrů je použita k získání odhadů parametrů v obou případech. Počátek lognormálních křivek představuje minimální mzda v daném roce v obou případech pro čtyřparametrové a tříparametrové lognormální rozdělení. Testové kritérium chí-kvadrát je použito k vyhodnocení přesnosti získaných modelů. Hlavní vědecká hypotéza tedy spočívá v tvrzení, že pomocí kvantilové metody odhadu parametrů vedou čtyřparametrové lognormální křivky k přesnějším modelům než tříparametrové lognormální křivky.

V rámci bodového odhadu parametrů pomocí kvantilové metody poskytovaly čtyřparametrové lognormální křivky přesnější modely rozdělení mezd než tříparametrové lognormální křivky v převážné většině mzdových rozdělení. Čtyřparametrové a tříparametrové lognormální křivky přinesly stejnou přesnost ve výsledcích pouze v šesti z třiceti distribucí mezd. Tříparametrické lognormální křivky nebyly v žádném z případů přesnější než čtyřparametrové lognormální křivky. Tvar modelového rozdělení mezd společně s rostoucí úrovní mzdových rozdělení se výrazně mění s rostoucí velikostí firmy až na 1 000 zaměstnanců. U společností nad 1 000 zaměstnanců se tvar a úroveň rozdělení mezd už výrazně nemění.

RESUME

This paper deals with the construction of wage distribution models using four-parameter and three-parameter lognormal curves. The main objective of the research is to compare the accuracy using both types of lognormal distribution as wage distribution models. The main research variable is the gross monthly nominal wage.. The results in terms of the accuracy of both types of lognormal curves are approximately identical only in a few cases. However, the differences are not critical. The quantile method of parameter estimation is used to obtain the parameter estimations in both cases. The beginning of lognormal curves is the minimum wage in the given year in both cases, four-parameter and three-parameter lognormal distributions. The chi-square testing criterion is used to evaluate the accuracy of the models obtained. Thus, the main scientific hypothesis is based on the statement that using the quantile method of parameter estimation, four-parameter lognormal curves result in more accurate models than three-parameter lognormal curves.

Within the point parameter estimation using quantile method, four-parameter lognormal curves provided more accurate models of wage distributions than three-parameter lognormal curves in the vast majority of wage distributions. Four-parameter and three-parameter lognormal curves produced the same accuracy in the results only in six from thirty wage distributions. Three-parameter lognormal curves were not more accurate than four-parameter lognormal curves in either case. The shape of model wage distributions together with the growing level of wage distributions are changing significantly with the growing size of the company, up to

1,000 employees. For companies with more than 1,000 employees, the shape and level of wage distributions do not change significantly.

PROFESIJNÝ ŽIVOTOPIS
Doc. Ing. Diana Bílková, Dr.*, vyštudovala štatistiku na Fakultě informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze (1992) a od tohoto roku pedagogicky pôsobí na jej katedrě statistiky a pravděpodobnosti. Po získaní titulu Dr. v odbore štatistika (1996) bola menovaná docentkou pre odbor štatistika v roku 2013. Vo vedecko-výskumnej práci sa zameriava najmä na oblasť teórie pravdepodobnosti a matematické štatistiky, obzvlášť na modelovanie, analýzu vývoja a predikciu mzdových a príjmových rozdelení. Je autorkou či spoluautorkou viac než stovky odborných článkov a statí v Českej republike i v zahraničí, vedeckých štúdií, skrípt, recenzií a oponentských posudkov a jednej učebnice. Má viac ako sedem desiatok citačných ohlasov v publikáciách iných autorov v Českej republike i v zahraničí (z toho cca tretinu predstavujú citácie sledované vo Web of Science). Podieľala sa na riešení osem vedeckých projektov, z nich vo dvoch prípadoch bola riešiteľkou. Je členkou České statistické společnosti a členkou organizačného výboru konferencie „International Days of Statistics and Economics” sledované v „Conference Proceedings Citation Index”. Bola vedúca takmer päťdesiatich úspešne obhájených diplomových prác.*

KONTAKT
diana.bilkova@vse.cz