SLOVENSKÁ ŠTATISTIKA a DEMOGRAFIA

SLOVAK STATISTICS and DEMOGRAPHY

1/2017
ročník/volume 27

Recenzovaný vedecký časopis so zameraním na prezentáciu moderných štatistických a demografických metód a postupov.

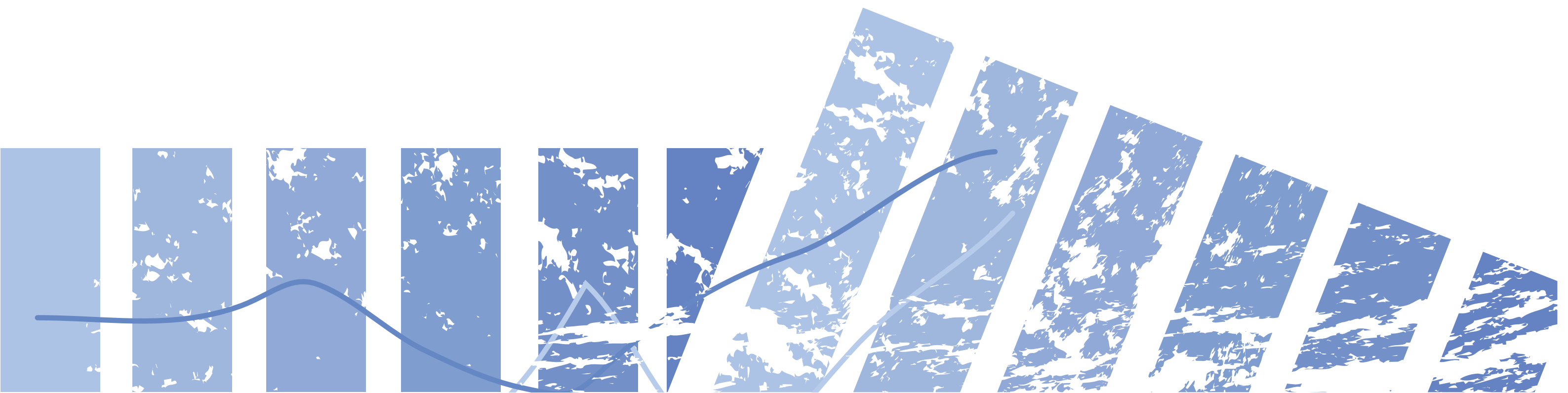
Scientific peer-reviewed journal focusing on the presentation of modern statistical and demographic methods and procedures.

Článok/Article: 2

Typ článku/Type of article: vedecký článok/scientific article

Strany/Pages: 13 – 22

Dátum vydania/Publication date: 15. január 2017/January 15, 2017



Michal PÁLEŠ
Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave

VYUŽITIE KOPULA FUNKCIÍ PRI AGREGÁCII RIZÍK

THE USE OF COPULA FUNCTIONS IN RISK AGGREGATION

ABSTRAKT
Kopula funkcie (tiež kopuly) sa v súčasnosti stávajú významným nástrojom modelovania náhodných procesov v rôznych oblastiach. V rámci riadenia rizík v aktuárstve sa tieto funkcie využívajú pri agregácii viacerých rizík, keď sú riziká opísané rozdielnymi marginálnymi rozdeleniami a existuje medzi nimi závislosť. Práve túto závislosť možno vyjadriť pomocou rôznych typov kopula funkcií, teda pomocou viacrozmerných rozdelení bez zmeny pôvodných marginálnych rozdelení náhodných premenných. Kopuly sú teda nástrojom, ktorého využitím dokážeme vytvoriť z marginálnych rozdelení združené rozdelenie a tak získať združenú funkciu hustoty, ktorá odzrkadľuje závislosť modelovaných náhodných premenných. Tento postup nám potom umožňuje previesť viacrozmerné problémy riadenia rizík na jednorozmerný problém s väzbou, ktorá je daná práve kopulou. Príspevok si kladie za cieľ uviesť čitateľa do tejto aktuálnej problematiky, pričom pri aplikáciách z oblasti finančných rizík využijeme jazyk R.

ABSTRACT
The copula function (also known as copulas) is now becoming an important tool for modelling random processes in various fields. As part of risk management in actuarial science these functions are used in an aggregation of various risks, where risks are described with different marginal distributions with dependency between them. This particular dependence can be expressed by various types of copula functions, thus using multidimensional distributions without changing the original marginally distributed random variables. Copulas are therefore a tool enabling the creation of combined distribution from the marginal distribution, thus obtaining a corporate density function reflecting the dependence of the modelled random variables. This process then allows us to convert the multidimensional problems of risk management to a one-dimensional problem with a tie which is regulated by a copula. The aim of paper is to familiarize the readers with the current problem, when for the financial risk applications the language R will be used.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ
kopula funkcie, miery závislosti, Solventnosť II, analýza rizík, jazyk R

KEY WORDS
Copula functions, dependence measures, Solvency II, risk analysis, R language

1. ÚVOD

História kopúl sa datuje do 20. storočia. Začal ju písať Maurice R. Fréchet, ktorý sa zaoberal úlohou združených distribučných funkcií pre dve dimenzie so známymi marginálnymi rozdeleniami. Prelom nastal v 50. rokoch, keď Abe Sklar predstavil a zaviedol pojem kopula. Vytvoril a dokázal vetu nesúcu jeho meno, ktorá sa dodnes považuje za základný pilier teórie kopúl. Od päťdesiatych rokov prešla teória a použitie kopúl dlhým vývojom. V súčasnosti sa kopuly využívajú v medicíne, meteorológii a na modelovanie rizík v oblasti finančníctva a poisťovníctva.

Modelovanie závislosti medzi faktormi opisujúcimi riziko (medzi príslušnými náhodnými premennými) je veľmi dôležitou oblasťou súčasného prístupu k riadeniu rizík, a to zvlášť v rámci regulatórnych pravidiel Solvency II. Pritom základným nástrojom, ktorý sa v tomto kontexte používa, sú už spomenuté kopuly. Na kopuly nadväzujú aj miery závislosti, ktoré zohrávajú v teórii rizika veľmi dôležitú úlohu, pretože napríklad v rámci tzv. ERM (*Enterprise Risk Management*) sa riziká často agregujú a práve ich prípadná závislosť do procesu agregácie významne zasahuje. Napríklad ak sú riziká pozitívne korelované, potom riziko ich súčasného výskytu môže byť vysoké (napr. riziko chorobnosti a riziko úmrtnosti). Miery závislosti sú ďalej dôležité aj pri finančných rizikách, nielen na výpočet celkovej rizikovej expozície, ale aj keď spoločnosť stanovuje rozsah aktivít v rôznych oblastiach s rôznymi výnosmi.

Cieľom príspevku je informovať o tejto aktuálnej problematike. Najskôr opíšeme miery rizika a potrebu agregácie rizík, uvedieme metódy agregácie rizík, stručne definujeme kopula funkcie, ich členenie a využitím funkcionality jazyka R ukážeme aplikáciu archimedovskej kopuly v oblasti riadenia finančných rizík na modelových príkladoch vrátane grafickej interpretácie. Pri analýze využijeme aj špecifickú knižnicu pre kopula funkcie *copula*.

2. MIERY RIZIKA A AGREGÁCIA RIZÍK

Riziko – finančné alebo poistné – v závislosti od použitej literatúry rozdeľujeme do rôznych kategórií. Finančné riziká sa najčastejšie spájajú s trhovými a kreditnými rizikami, rizikom likvidity a operačným rizikom. V poisťovníctve je popri týchto rizikách významné aj poistno-technické riziko.

Riziko možno kvantifikovať pomocou vhodných *mier rizika*. Metodika merania rizík v súčasnosti súvisí najmä s direktívou Solventnosť II, kde sa určité vhodné miery rizika inštitucionalizujú tak, aby čo najlepšie vyhovovali požiadavkám regulátora a súčasne rovnako aj vnútornému kontrolingu poisťovne. Pre viac informácií o metodike Solventnosť II a prístupe k rizikám pozri napr. [1].

Meranie rizika sa dá potom chápať ako komplex činností (prístup, nástroje, metodiky, postupy) pri analýze (riadení) rizika (rizikových faktorov) v určitej oblasti. Prístupy k meraniu rizika sa delia na *stochastické* a *deterministické*. Najpopulárnejší je v súčasnosti stochastický prístup, ktorý pracuje s mierami rizika založenými na rozdeleniach pravdepodobnosti náhodnej premennej opisujúcej napr. stratu portfólia. Najznámejšou mierou rizika spadajúcou do tejto kategórie je *hodnota v riziku* (*Value at Risk*, ďalej aj „VaR“). Distribučná funkcia straty nám dáva celkový obraz o strate portfólia. Je zrejmé, že na stratu sa rizikový manažér zameriava najviac, a preto je prirodzené modelovať riziko pomocou distribučnej funkcie straty. Tento prístup dáva zmysel aj pri agregácii rizík (pozri ďalej) a navyše, ak je táto distribučná funkcia správne odhadnutá, zahŕňa aj diverzifikačné efekty. A nakoniec k veľkým výhodám tohto prístupu patrí aj to, že distribučné funkcie môžeme vzájomne porovnávať. Nevýhodou je, že používanie historických údajov nemusí byť vždy relevantné pre predikciu budúcej straty a rovnako samotný odhad distribučnej funkcie nemusí byť dostatočne presný pre veľké portfóliá.

Kvantilové miery rizika predstavujú minimálnu kapitálovú požiadavku, aby príslušná pozícia bola takmer bezriziková, resp. aby kapitál vo výške tejto kapitálovej požiadavky nepokryl možnú stratu len s veľmi malou pravdepodobnosťou známej výšky. Najčastejším predstaviteľom kvantilovej miery rizika, ako sme už uviedli, je VaR. VaR je odhadom maximálnej straty, ku ktorej môže dôjsť s predpísanou spoľahlivosťou v stanovenom budúcom období. VaR sa obvykle využíva pri meraní trhového rizika (napr. v bankovom portfóliu v krátkych časových intervaloch) a pri meraní poistného rizika (v intervale napr. jedného roka). Prostredníctvom VaR je možné určiť *ekonomický kapitál* pre dané riziko. Ekonomický kapitál (tiež rizikový, regulatórny) je kapitál, ktorý vlastníci (napr. akcionári) musia investovať do spoločnosti, aby udržali jej solventnosť, ktorá s určitou pravdepodobnosťou zaručuje nepretržitý chod spoločnosti v danom období. Tento kapitál by mal garantovať, že možné riziká nespôsobia úpadok spoločnosti, teda že nesolventnou by sa mohla stať len pri katastrofických a veľmi nepravdepodobných udalostiach (pričom ich výskyt sa podľa regulatórnych metodík odhaduje najčastejšie s 5 %, resp. 1 % pravdepodobnosťou). Ekonomický kapitál sa určuje na základe rizík, ktorým je spoločnosť vystavená, pričom podľa druhu rizika sa určí ekonomický kapitál potrebný na ich krytie.

Spoločnosti však tieto riziká musia agregovať, teda určiť ekonomický kapitál pre všetky riziká, ktorým je poisťovňa vystavená. Agregácia rizík má aj pre poisťovňu významný *diverzifikačný efekt*, ktorý môžeme definovať ako zápornú hodnotu kapitálu vyplývajúcu z korelácie vzájomných vzťahov medzi jednotlivými typmi rizika. Pod agregáciou rizík chápeme spájanie rôznych typov rizík do jedného portfólia alebo spájanie jednotlivých tried v rámci jedného typu rizika. Najjednoduchší spôsob, ako spojiť riziká, je ich sčítanie. No existujú aj ďalšie, sofistikovanejšie metódy agregácie rizík, ktorými sa dá dosiahnuť diverzifikačný efekt. Na agregáciu rizík možno využiť viacero metód:

- ***agregáciu sčítaním*** (nezávislých, resp. úplne závislých rizík),
- ***agregáciu pridelením fixných percent***,
- ***agregáciu pomocou variančno-kovariančnej matice***,
- ***agregáciu pomocou funkcií kopula***.

Posledná z uvedených metód predstavuje najsofistikovanejšiu metódu agregácie rizík, pretože funkcie kopula predstavujú metódu modelovania závislostí medzi premennými, z ktorej vyplýva aj diverzifikačný efekt. Potreba modelovať vývoj dvoch faktorov, ktoré sú do určitej miery závislé, vedie k využívaniu kopúl, pretože umožňujú zachytiť závislosť pri zachovaní vlastností pravdepodobnostných rozdelení jednotlivých rizikových faktorov, teda marginálnych rozdelení. Opis a výhody aj nevýhody ďalších metód agregácie rizík uvádza napr. [9].

3. FUNKCIE KOPULA A MIERY ZÁVISLOSTI

Dôležitým teoretickým východiskom na stručné vysvetlenie matematického aparátu kopúl je Sklarova veta.

Veta (Sklarova). Nech $C(u_1, \dots, u_d)$ je *d*-rozmerná kopula a $F_1(x_1), \dots F_d(x_d)$ sú jednorozmerné distribučné funkcie, potom funkcia $F(x_1, \dots, x_d)$ definovaná vzťahom

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, \dots, F_d$.

V praxi sa aplikujú kopuly rôzneho typu. V základnej klasifikácii ide o

- ***elementárne kopuly*** (*nezávislá*, *komonotónna*, *kontramonotónna kopula*),
- ***implicitné kopuly*** (*Gaussova*, *Studentova kopula*),
- ***archimedovské (explicitné) kopuly*** (*Gumbelova*, *Claytonova*, *zovšeobecnená Claytonova*, *Frankova kopula*).

Archimedovské kopuly sa v praxi vyskytujú najčastejšie pre svoju relatívne ľahkú konštrukciu a tiež vzhľadom na jednotný matematický postup, na základe ktorého ich možno skonštruovať. Rovnako sa najviac využívajú pri modelovaní kreditného rizika (v bankovom či inom portfóliu zaťaženom úvermi). Pre archimedovské kopuly je kľúčovým pojmom *generátor kopuly*.

Ďalej sa zameriame už len na opis *dvojrozmernej Gumbelovej kopuly*, ktorá sa pre svoje vlastnosti najviac využíva na modelovanie závislostí medzi stratami (meranými ako kladné čísla) rôznych úverových portfólií v banke alebo medzi vysokými škodami v poisťovni.

Definícia (Gumbelova kopula). Kopula má striktný generátor v tvare

$$_{Gu}\varphi(u) = (-\ln u)^{\theta}$$

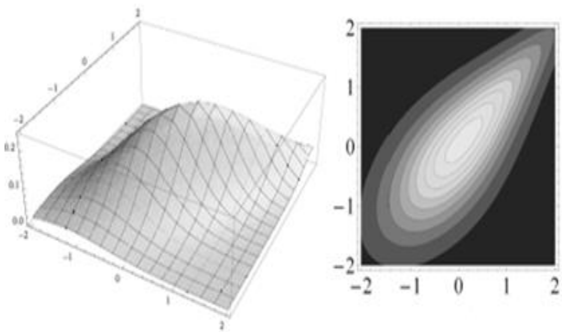
pre parameter $\theta \geq 1$ a v dvojrozmernom prípade ju môžeme zapísať ako

$$_{Gu}C(u_1, u_2) = \exp\left\{-((-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}\right\} \qquad (*),$$

resp.

$$_{Gu}C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = e^{-((-\ln F_1(x_1))^{\theta} + (-\ln F_2(x_2))^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}}.$$

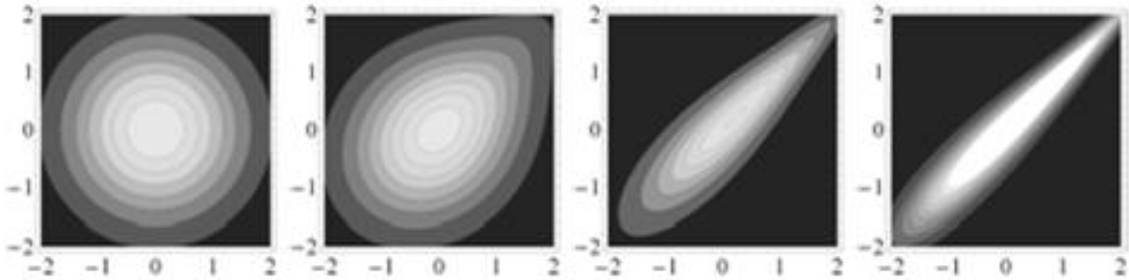
Obrázok č. 1: 3D zobrazenie grafu hustoty a izočiary hustoty dvojrozmerného rozdelenia s Gumbelovou kopulou, ak $\theta = 2$***, kde náhodné premenné*** X_1, X_2 ***sa riadia normovaným normálnym rozdelením***



Zdroj: [7]

Gumbelova kopula prechádza pre $\theta = 1$ na nezávislú kopulu a pre $\theta \to \infty$ na komotónnu (t. j. minimálnu) kopulu. Možno ju teda považovať za štruktúru závislosti, ktorá je interpoláciou medzi nezávislosťou a úplnou pozitívnou závislosťou, kde silu tejto závislosti riadi parameter θ. Ďalej platí, že Gumbelova kopula (na rozdiel od napr. Claytonovej kopuly) vykazuje závislosť v horných kladných koncoch, ale už nie v dolných záporných koncoch, pozri obrázok č. 1 a 2.

Obrázok č. 2: Izočiary hustoty dvojrozmerného rozdelenia s Gumbelovou kopulou pre hodnoty parametra** θ = 1; 1,25; 3; 5**, kde náhodné premenné** X_1, X_2 **sa riadia normovaným normálnym rozdelením



Zdroj: [7]

V rámci *mier závislostí* rozlišujeme prinajmenšom:

- ***lineárne korelácie*** (korelačný koeficient),
- ***poradové korelácie*** (Kendallov koeficient τ, Spearmanov koeficient ρ),
- ***závislosti chvostov*** (koeficient hornej [dolnej] závislosti chvostov náhodných premenných).

Poradové korelácie sú miery závislosti, ktoré na rozdiel od lineárnych korelácií nezávisia od marginálneho rozdelenia príslušných náhodných premenných, ale len od ich kopuly. A pretože ich empirické odhady, ktoré môžu byť konštruované len na základe poradia pozorovaných hodnôt, sú ľahko odhadnuteľné, využívajú sa na kalibráciu kopúl. Napríklad vzťah Kendallovho τ a parametra θ Gumbelovej kopuly je nasledujúci:

$$\rho_\tau = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

Na použitie kopúl pri stanovovaní ekonomického kapitálu (pozri aj záver) potrebného na krytie škody (straty) spôsobenej napr. dvoma rizikami treba určiť, ktorá kopula najlepšie opisuje závislosť medzi skúmanými náhodnými premennými, odhadnúť ich parametre a pomocou optimálne zvolenej kopuly stanoviť bivariačné rozdelenie náhodných premenných. Na odhad parametrov a výber vhodnej funkcie kopula je možné použiť metódy, ktoré sa dajú rozdeliť do troch skupín:

- ***parametrické metódy*** (*metóda maximálnej vierohodnosti*),
- ***semiparametrické metódy*** (*semiparametrická metóda maximálnej vierohodnosti*),
- ***neparametrické metódy*** (*metóda založená na výpočte Kendallovho a Spearmanovho koeficienta*, *Genestova-Rivestova metóda*).

Veľmi jednoduchou je metóda založená na výpočte Kendallovho τ. Spočíva vo výpočte parametra kopuly pomocou vzťahu medzi Kendallovým τ a týmto parametrom, pričom najskôr sa vypočíta hodnota Kendallovho τ a potom sa táto hodnota dosadí do vzťahu na výpočet parametra vzhľadom na zvolenú kopulu. Pre výber vhodnej kopuly sa použije napr. chí-kvadrátový test dobrej zhody. Odhady parametrov archimedovských kopúl a výber vhodnej kopuly na základe informačných kritérií tiež ponúka rôzny komerčný softvér (napr. VOSE ModelRisk; [5], Matlab a i.).

Všeobecnejší výklad teórie vrátane hlbšieho matematického aparátu (definovanie vlastností kopúl, ďalších druhov kopúl, vybraných mier závislostí pre archimedovské kopuly, ďalšie aplikácie...) môže čitateľ nájsť v rôznych publikáciách (napr. v [1]; [7]; [9]), pričom metodika výkladu môže byť rozdielna.

4. APLIKÁCIA KOPÚL A UKÁŽKA VÝPOČTU V JAZYKU R

Uvažujme situáciu (popísanú v [1]), že banka prevádzkuje dve úverové portfóliá, pričom v prvom z nich strata nepresiahne 10 mil. peňažných jednotiek s pravdepodobnosťou 89,5 % a v druhom 5 mil. p. j. s pravdepodobnosťou 91,5 %. Určíme pravdepodobnosť toho, že v týchto portfóliách nedôjde k väčším než uvedeným stratám súčasne. Pri analýzach budeme vychádzať z predpokladu, že závislosť strát sa riadi Gumbelovou kopulou s parametrom $\theta = 1{,}9$.
Je zrejmé, že platí

$$_{Gu}C(F_1(10), F_2(5))) = {}_{Gu}C(0{,}895; 0{,}915)$$

a stačí vhodne dosadiť do vzťahu (*). Na výpočet využijeme jazyk R (viac o jazyku R pozri napr. [3]).

```
u_1<-0.895
u_2<-0.915
theta<-1.9
(Gu<-exp(-((-log(u_1))^theta+((-log(u_2))^theta))^(1/theta)))
```

Dostávame, že hľadaná pravdepodobnosť je 86,53301 %.

Modifikujme túto situáciu na situáciu, keď rovnako uvažujeme dve úverové portfóliá $n_{1,2}$ = 1 000, pričom strata v každom nich (náhodná premenná X, Y) sa riadi normálnym rozdelením s danými parametrami μ; σ. Simulujme pomocou jazyka R stratu v týchto portfóliách a určime tiež hodnoty strát, ktoré sa nepresiahnu pre jednotlivé portfóliá s pravdepodobnosťou 95 %, ak závislosť strát sa opätovne riadi Gumbelovou kopulou s parametrom $\theta = 1{,}9$.

```
x<-rnorm(1000,6.838,2.513)
y<-rnorm(1000,3.838,0.847)
theta<-1.9
p<-0.95

library(MASS)
estimate<-fitdistr(x,"normal")
mean1<-as.vector(estimate$estimate[1])
sd1<-as.vector(estimate$estimate[2])
estimate2<-fitdistr(y,"normal")
mean2<-as.vector(estimate2$estimate[1])
sd2<-as.vector(estimate2$estimate[2])
(VaR_X<-qnorm(p,mean1,sd1))
(VaR_Y<-qnorm(p,mean2,sd2))
(Gu<-exp(-((-log(p))^theta+((-log(p))^theta))^(1/theta)))
```

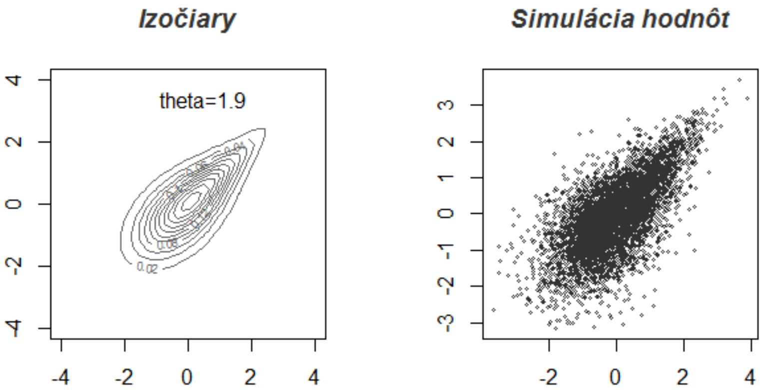
V prvom portfóliu strata nepresiahne s pravdepodobnosťou 95 % 11,03078 mil. p. j. a v druhom 5,214702 mil. p. j. Pravdepodobnosť toho, že v portfóliách nenastanú väčšie ako uvedené straty súčasne je 92,87878 %. Je potrebné uviesť, že získané hodnoty zodpovedajú prípadu jednej konkrétnej simulácie (pričom pri každej simulácii by sme dostali iné hodnoty).

Základné triedy kopula funkcií a súvisiace testy sú implementované vo viacerých knižniciach (*packages*) programovacieho jazyka R. V roku 2007 sa uskutočnil projekt s cieľom zjednotiť samostatné knižnice pre kopuly v prostredí R a vytvoriť novú komplexnú knižnicu s názvom *copula*. Tá sa až do dnešných dní neustále inovuje. Knižnica *copula* obsahuje množinu archimedovských a implicitných kopúl, kopuly s extrémnymi hodnotami a ďalšie triedy kopúl, ďalej funkcie hustoty, distribučnú funkciu, generátor náhodných čísel pre obsiahnuté triedy kopúl a rôzne testy (dobrej zhody, nezávislosti...) pre kopula funkcie. [10]

Ďalej uvedený zdrojový kód v jazyku R generuje graf izočiar hustoty dvojrozmerného rozdelenia s Gumbelovou kopulou, ak θ = 1,9, pričom náhodné premenné X_1, X_2 sa riadia normovaným normálnym rozdelením, a graf simulovaných 5 000 hodnôt z tohto rozdelenia. Výstup zobrazuje obrázok č. 3. Formálna stránka grafického výstupu je voliteľná prostredníctvom parametrov zodpovedajúcich funkcií.

```
library(copula)
cop.gumbel<-gumbelCopula(dim=2,param=1.9)
md.gumbel<-mvdc(copula=cop.gumbel,margins=c("norm","norm"),
paramMargins=list(list(mean=0,sd=1),list(mean=0,sd=1)))
gen.gumbel<-rMvdc(md.gumbel,n=5000)
par(mfrow=c(1,2))
contour(md.gumbel,dMvdc,xlim=c(-4,4),ylim=c(-4,4),
col=rgb(0.4,0.4,0.4),lwd=1.5,xlab="")
title("Izočiary",font.main=4,col.main=rgb(0.2,0.2,0.2),cex.sub=1
,font.sub=2,col.sub="black")
legend("top",legend="theta=1.9",bty="n")
plot(gen.gumbel,type="p",pch=1,cex=0.4,col=rgb(0.2,0.2,0.2),
main="",xlab="",ylab="")
title("Simulácia hodnôt",font.main=4,col.main=rgb(0.2,0.2,0.2))
```

Obrázok č. 3: Grafický výstup pre Gumbelovu kopulu s využitím knižnice copula



Zdroj: vlastné spracovanie

5. ZÁVER

Direktíva Európskej komisie Solvency II sa zameriava na rizikový profil poisťovne (pre banky direktíva Basel III) a tým aj kapitálu potrebného na jeho krytie. Zvyšujúci sa počet a zložitosť poistných produktov vyúsťuje do nevyhnutnosti skúmať závislosť medzi jednotlivými rizikami. Zanedbanie, resp. nesprávne určenie závislosti môže mať za následok podhodnotenie celkového rizika, ktorému je poisťovňa vystavená. Na druhej strane predpoklad úplnej závislosti medzi rizikami môže viesť k nadhodnoteniu kapitálovej požiadavky, čo sa prejaví vo vysokej viazanosti kapitálu. V prípravnej fáze metodiky Solvency II (a napr. aj v súčasnosti platnej metodike výpočtu kapitálovej požiadavky na solventnosť podľa štandardného vzorca) sa odporúčalo pri analýze závislosti medzi rizikami využívať tzv. lineárne koeficienty závislosti. Návrh na použitie práve tejto metodiky vyplýva najmä z jej jednoduchosti. Aplikácia daných koeficientov si však vyžaduje určité predpoklady, ktoré nie sú vždy splnené, napr. v prípade pravostranne zošikmených rozdelení s ťažkým pravým koncom opisujúcich niektoré riziká. Z toho vyplýva, že agregácia rizík pomocou takýchto korelácií môže zanedbať dôležitú informáciu týkajúcu sa práve pravých koncov rozdelení. Na rozdiel od lineárnych koeficientov, funkcie kopula zachytávajú celkovú štruktúru závislosti jednotlivých rizík. Najmä z tohto dôvodu sa stali v posledných rokoch významným nástrojom agregácie korelovaných portfólií rizík. Funkcie kopula teda predstavujú konštrukciu viacrozmerných rozdelení škôd (strát), ktoré poskytujú flexibilný a realistický model, pričom vyjadrujú závislosť modelovaných rizík pri zachovaní vlastností jednotlivých marginálnych rozdelení, ktoré zvažované riziká opisujú.

Ekonomický kapitál pre poisťovateľa predstavuje ochranu pred nepriaznivými udalosťami, t. j. keď skutočné škody sú vyššie ako očakávané škody alebo keď výnosy z aktív klesnú pod očakávanú hodnotu. Prevencia v podobe spomínanej ochrany zlepšuje poisťovateľovu schopnosť splácať budúce záväzky a často umožňuje rozvíjať podnikateľskú činnosť, dokonca aj pri nepriaznivých finančných udalostiach. S agregáciou rizík úzko súvisí diverzifikačný efekt, vyplývajúci z prevádzkovania viacerých závislých predmetov podnikania. Vzhľadom na existujúce rozdiely v kapitálových požiadavkách v praxi možno analyzovať vplyv použitia metódy agregácie rizík pomocou kopúl na určenie ekonomického kapitálu spoločnosti, ktorá má napríklad viac predmetov podnikania. Využitie kopúl predstavuje jednu z možností, ako analyzovať riziká, a tým následne docieliť presnejší odhad ekonomického kapitálu, čo má význam tak pre poisťovňu (pri alokácii zdrojov), ako aj pre klientov poisťovne (v oblasti záruk, ktoré im poisťovňa poskytuje).

V príspevku sme prezentovali aplikáciu Gumbelovej kopuly ako jednu z metód agregácie rizík v oblasti analýzy rizika v aktuárskej praxi. Tejto aplikácii predchádzal stručný teoretický opis problematiky teórie rizika a teórie kopula funkcií. Ako riešiteľský nástroj sme využili jazyk R, pričom okrem štandardného rozhrania R aj knižnica *copula* obsahuje implementované kopula funkcie, najdôležitejšie testy súvisiace s kopulami a ďalšie užitočné funkcie, ktoré sa dajú využiť pri práci s viacrozmernými dátovými súbormi. Na záver však musíme objektívne poznamenať, že aj kopuly sú len statickým modelovacím nástrojom, ktorý napr. na rozdiel od modelov finančných časových radov nie je schopný opísať dynamiku daných rizikových procesov.

Príspevok bol spracovaný v rámci projektu VEGA č. 1/0923/17 Technické rezervy v neživotnom poistení v podmienkach Solventnosti II na slovenskom poistnom trhu a VEGA č. 1/0262/17 Tvorba aktuárskych interných modelov v kontexte direktívy Solvency II s podporou využitia softvéru.

LITERATÚRA

[1] CIPRA, T.: Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-24-8.
[2] HUŤKA, V.: Teória pravdepodobnosti 2. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2005. ISBN 80-225-2040-3.
[3] PÁLEŠ, M.: Grafická podpora jazyka R pri štatistických analýzach. In: Slovenská štatistika a demografia, 2016, č. 1.
[4] PÁLEŠ, M.: Teória rizika a jej aplikácia v rozhodovacích procesoch komerčných poisťovní. In: IMEA 2010. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010. ISBN 978-80-7395-254-9.
[5] PÁLEŠ, M.: Využitie software pri výučbe predmetov z oblasti aktuárstva. In: MITAV 2014. Brno: Univerzita obrany v Brně, 2014. ISBN 978-80-7231-961-9.
[6] PÁLEŠ, M. – POLÁČEK, Š.: Softvérová podpora pri modelovaní rozdelenia celkovej škody v havarijnom poistení. In: Slovenská štatistika a demografia, 2012.
[7] PRELECOVÁ, N.: Modelování finančních rizik pomocí kopul. Diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2014.
[8] R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2014.
[9] SIMANOVÁ, B.: Stochastické modely v neživotnom poistení. Dizertačná práca. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, 2014.
[10] SZŰCS, G.: Využitie kopula funkcií v štatistickom programe R. In: Forum Statisticum Slovacum, 7/VIII, Bratislava, 2012.
[11] ŠOLTÉS, E.: Regresná a korelačná analýza s aplikáciami. Bratislava: Iura Edition, 2008. ISBN 978-80-8078-163-7.

RESUME

Economic capital modelling is one of the fundamental components of risk management in the insurance company and is a tool for the actuary to protect the insurance company against unexpected risks and thus also losses. The company has to analyse its relevant risks and by using models for determining the economic capital it has to identify the risks having the potential of threatening its profitability. From 1 January 2016, the Solvency II methodology has been in force, i.e. a project for the regulation of insurance companies, representing a systematic approach to risk management leading to better risk valuation and guaranteeing higher protection of the insured persons. Solvency II provides several methods for calculating the capital requirement, which could be chosen freely by insurance companies in view of their extent and complexity. The risk management function is closely related with this activity carried out by the actuary of insurance company. The use of copula function and the R language can successfully analyse the risk aggregation.

PROFESIJNÝ ŽIVOTOPIS

Ing. Michal Páleš, PhD., *od roku 2012 pôsobí ako odborný asistent (sekcia aktuárskych vied) a tajomník Katedry matematiky a aktuárstva Fakulty hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave. V rámci pedagogickej činnosti vyučuje cvičenia k predmetom matematika, vybrané kapitoly z matematiky, teória pravdepodobnosti, teória*

rizika v poistení a softvérové aplikácie pre aktuárov. Vo svojej vedeckej práci sa orientuje na využitie matematickoštatistických metód v ekonómii a teórii rizika v neživotnom poistení (Panjerove rekurentné vzťahy, rozdelenia pravdepodobnosti využívané v aktuárskej praxi, softvérová podpora riadenia rizík, najmä jazyk R).

KONTAKT
pales.euba@gmail.com