

SLOVENSKÁ ŠTATISTIKA a DEMOGRAFIA

SLOVAK STATISTICS
and DEMOGRAPHY

2/2015

ročník/volume 25

Recenzovaný vedecký časopis so zameraním na prezentáciu moderných štatistických a demografických metód a postupov.

Scientific peer-reviewed journal focusing on the presentation of modern statistical and demographic methods and procedures.

Článok/Article: 3

Typ článku/Type of article: vedecký článok/scientific article

Strany/Pages: 33 – 42

Dátum vydania/Publication date: 15. apríl 2015/April 15, 2015



Viera PACÁKOVÁ
Ústav matematiky a kvantitatívnych metód, Fakulta ekonomicko-správni,
Univerzita Pardubice

Vladimír BUREŠ
Fakulta ekonomicko-správni, Univerzita Pardubice

MODELY ÚMRTNOSTI V POJISTNÉ PRAXI

MORTALITY MODELS IN INSURANCE PRACTICE

ABSTRAKT

Na konkurenčnom poisťnom trhu roste význam korektnosti všetkých poisťne-matematických výpočtov a používajú sa stále kvalitnejšie, níméně náročnejšie metódy. Praktické aktuárske výpočty, hlavne výpočet poisťného pri životním a dôchodovém poisťnení, vyžadujú znalosť modelů úmrtnosti pro homogenní tarifní skupiny poisťněných osob. Cílem příspěvku je prezentovat modely úmrtnosti získané analýzou statistických dat publikovaných na stránkách NBS (Národní banky Slovenska) o počtu poisťněných osob a počtu poisťných událostí při riziku úmrtí dle pohlaví a věku na základě opatrenia č. 20/2008 ze 4. 11. 2008.

ABSTRACT

On a competitive insurance market there is an increasing importance of correctness of actuarial calculations where high-quality and even more difficult methods have been used. The practical actuarial calculations, especially the premium calculation in life and pension insurance, require the knowledge of mortality models for homogeneous tariff groups of insured persons. The aim of this paper is to the present mortality models, obtained by statistical data analysis published on the website of NBS (National Bank of Slovakia) on the number of insured persons and on the number of claims in the risk of death by gender and by age based on the "Decree No. 20/2008" of November 4, 2008.

KLÍČOVÁ SLOVA

hrubá míra úmrtnosti, modely úmrtnosti, graduace, metody graduace

KEY WORDS

crude mortality rate, mortality models, graduation, graduation methods

1. ÚVOD

Úmrtnostní tabulky, jako nejjednodušší model úmrtnosti, jsou pro životní pojišťovny stále důležitým nástrojem pro mnoho poisťne-matematických výpočtov. Velké životní pojišťovny, které disponují dostatečně velkými soubory potřebných dat z rozsáhlých portfolií poisťněných osob, často konstruují své vlastní úmrtnostní tabulky, které se mohou značně lišit od celostátních úmrtnostních tabulek.

Historická demografická data potvrzují, že významnými tarifními faktory při riziku úmrtí jsou věk a pohlaví poisťněných. Rada Evropské unie však přijala 13. prosince 2004 *Směrnici č. 2004/113/ES o zavedení zásady rovného zacházení mezi muži a ženami v přístupu ke zboží a službám a jejich poskytování s cílem stanovit rámec*

pro boj proti diskriminaci na základě pohlaví v přístupu ke zboží a službám a jejich poskytování.

Podle článku 5 této směrnice použití pohlaví jako faktoru pro výpočet pojistného a slev nesmí mít za následek rozdíly v pojistném a slevách jednotlivců u smluv uzavřených po 21. prosinci 2007. Protože tato směrnice je zjevně v rozporu se základní zásadou komerčního pojištění, že výše pojistného je úměrná výši rizika, její obsah byl v praxi pojistného trhu v Evropské unii spojen se značnými rozpaky. Slovenská republika ve smyslu odstavce 2 článku 5 směrnice ve snaze zajistit, aby byly shromažďovány, zveřejňovány a pravidelně aktualizovány přesné údaje, které se týkají použití pohlaví jako určujícího pojistně-matematického faktoru, na základě *opatrenia Národnej banky Slovenska č. 20/2008 o predkladaní poistno-matematických údajov a štatistických údajov poisťovne a pobočky zahraničnej poisťovne* ze dne 4. listopadu 2008 začala v roce 2009 shromažďovat od pojišťoven statistické údaje o pojištěných osobách na příslušné riziko. Tyto údaje, publikované na internetové stránce [10] NBS, tvoří také základ pro analýzy a jejich výsledky v tomto článku.

2. GRADUACE HRUBÝCH MĚR ÚMRTNOSTI POJIŠTĚNÉ POPULACE

Prvním krokem při konstrukci modelů úmrtnosti jako funkce věku x je výpočet tzv. hrubé míry úmrtnosti pro každý sledovaný věk x pojištěných osob podle vztahu

$$q_x = \frac{D_x}{E_x},$$

ve kterém D_x je počet zemřelých ve věku x a E_x je expozice vůči riziku, čímž rozumíme počet osob pojištěných na příslušné riziko v daném věku x , upravený podle délky trvání pojistné smlouvy.

Protože modely úmrtnosti jsou konstruována na základě výběrových statistických dat, odhady pravděpodobnosti úmrtí pomocí hrubých měr úmrtnosti kolísají kolem jejich skutečných hodnot. Graf hrubých měr úmrtnosti pak představuje křivku s nehladkými úseky. Praktické aktuárské výpočty při životním a důchodovém pojištění vyžadují plynulý vývoj při přechodu mezi sousedním věkem, proto je třeba tento jev odstranit tzv. graduací (vyrovnáním, vyhlazením) měr úmrtnosti.

Graduace neboli vyrovnávání (vyhlazování) úmrtnostních tabulek je proces, při kterém se z úmrtnostních charakteristik eliminují nesystematické nepravidelnosti, které nemají racionální zdůvodnění [2].

V praxi se využívají dvě základní skupiny metod graduace měr úmrtnosti:

1. *Analytická (parametrická) graduace*, která spočívá v statistickém odhadu parametrů vhodně zvolené hladké křivky, resp. matematické funkce, jejíž všeobecný tvar odpovídá reálným datům, které mají být graduovány. Nejznámější takovou funkcí je *Gompertzova-Makehamova křivka*, vyjádřena vztahem

$$q_x = a + b \cdot c^x, \text{ kde } a > 0, b > 0, c > 1 \text{ jsou parametry.}$$

2. *Neparametrická (mechanická) graduace*, zaměřená na získání vyhlazených údajů zpřůměrováním hodnot hrubých měr úmrtnosti ve vhodně zvoleném okolí věku x .

Pro svoji výpočetní jednoduchost patří neparametrická metody graduace k nejčastěji používaným metodám. Vyrovnanou míru úmrtnosti q_x pro daný věk x získáme výpočtem aritmetického průměru hrubých měr úmrtnosti z vhodné zvolené okolí věku x . Přitom jde většinou o vážený průměr, který přiřazuje zprůměrovaným hodnotám tím menší váhu, čím jsou vzdálenější od věku x , tj. od středu příslušného okolí. Váhy jsou symetrické kolem svého středu a jejich součet je vždy roven hodnotě 1. Tyto metody jsou založeny na principu tzv. metody klouzavých průměrů.

Podrobný teoretický výklad široké škály metod graduace je uveden v [1], [7] a [8] spolu s metodami testování jejich hladkosti a přesnosti.

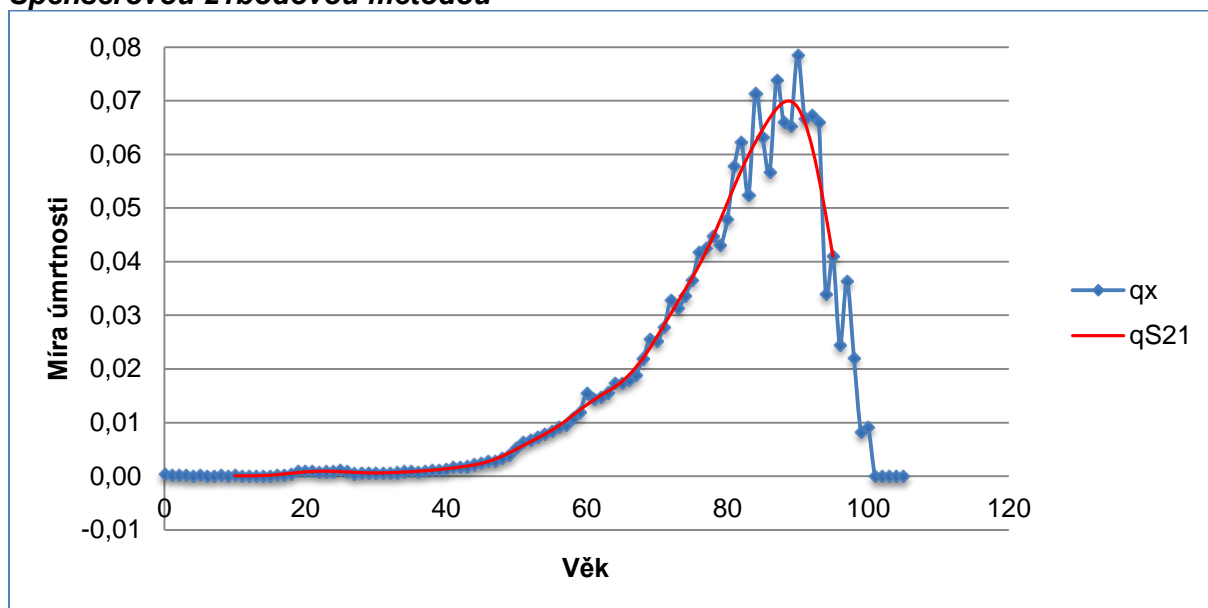
Na základě souhrnných dat o počtu zemřelých D_x a příslušných hodnot expozice vůči riziku úmrtí E_x , zveřejněných v souboru [10] Podkladove_udaje_1999_2010 na stránce NBS, jsme pro obě pohlaví a pro věk od 0 do 100 let vyčíslili hrubé míry úmrtnosti q_x . Pro jejich graduaci jsme použili Wittsteinovu, Schärtlinovu, Spenserovu 15bodovou a 21bodovou neparametrickou metodu a také Hendersonovu metodu podle teorie v [1] a [7] a jejich výsledky jsme testovali na kvalitu hladkosti a přesnosti zvlášť pro muže a ženy všemi testy podle [7]. Na základě výsledků všech testů nejvyšší kvalitu graduaci hrubých měr úmrtnosti pro obě pohlaví poskytla Spenserova 21bodová metoda (obr. 1) a (obr. 2).

Při graduaci pomocí Spenserovy 21bodové metody je pro vyrovnávání měr úmrtnosti použita metoda vážených klouzavých průměrů délky. Vyrovnanou hodnotu míry úmrtnosti pro věk x dostaneme podle vztahu:

$$\dot{q}_x^{S(21)} = \frac{1}{350} [60q_x + 57(q_{x-1} + q_{x+1}) + 47(q_{x-2} + q_{x+2}) + 33(q_{x-3} + q_{x+3}) + 18(q_{x-4} + q_{x+4}) + 6(q_{x-5} + q_{x+5}) - 2(q_{x-6} + q_{x+6}) - 5(q_{x-7} + q_{x+7}) - 5(q_{x-8} + q_{x+8}) - 3(q_{x-9} + q_{x+9}) - (q_{x-10} + q_{x+10})]$$

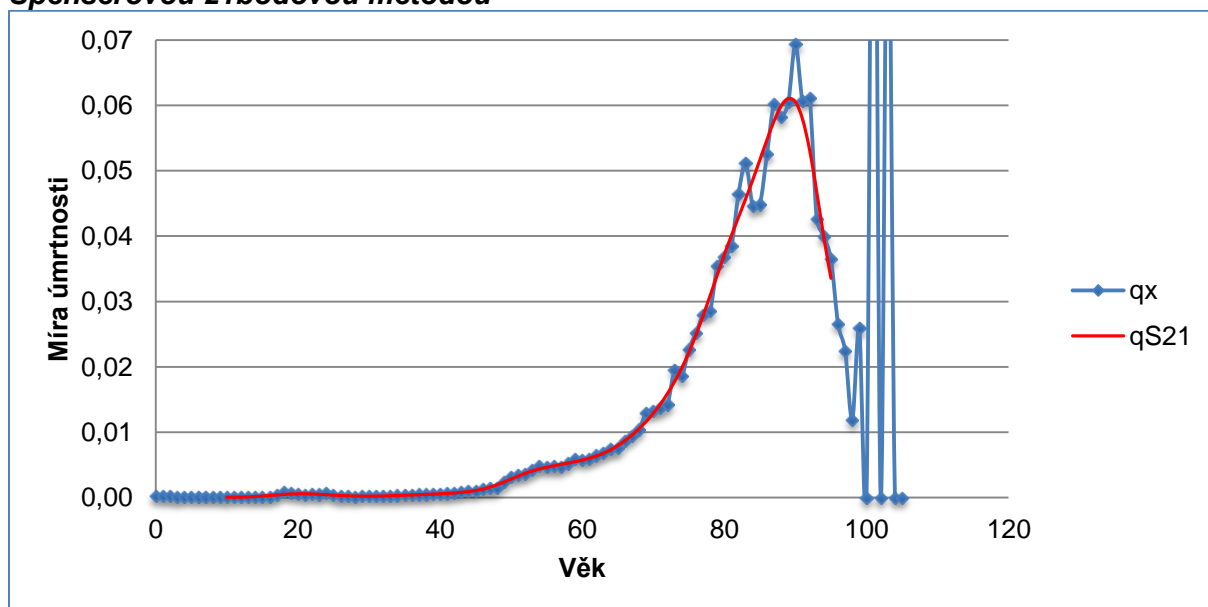
Testy nepotvrdily dostatečnou přesnost při graduaci pomocí hladké Gompertzovy-Makehamovy funkce na celém intervalu věku od 0 do 100 let pro muže ani pro ženy.

Obrázek č. 1: Výsledek graduace hrubých měr úmrtnosti pro pojištěné muže v SR Spenserovou 21bodovou metodou



Zdroj: vlastní zpracování podle dat z [10]

Obrázek č. 2: Výsledek graduace hrubých měr úmrtnosti pro pojištěné ženy v SR Spenserovou 21bodovou metodou



Zdroj: vlastní zpracování podle dat z [10]

3. GRADUACE POMOCÍ STANDARDNÍCH TABULEK

Pokud budeme chtít graduovat relativně malý počet údajů, například v případě jednotlivých životních pojišťoven nebo penzijních fondů, je možné pro graduaci použít data ze standardních úmrtnostních tabulek, které jsou vytvořená pomocí rozsáhlých datových souborů. Pokusíme se přitom vyjádřit graduované hodnoty \dot{q}_x jako jednoduché regresní funkce standardních měr úmrtnosti q_x^s , kde $\dot{q}_x = f(q_x^s)$, tak, aby byla splněna základní podmínka metody nejmenších čtverců:

$$\sum_x (q_x - \dot{q}_x)^2 = \sum_x [q_x - f(q_x^s)]^2 = \min.$$

Tyto funkce mohou mít různé tvary, např.

$$\dot{q}_x = a \cdot q_x^s$$

$$\dot{q}_x = a \cdot q_x^s + b$$

$$\dot{q}_x = (ax + b) \cdot q_x^s$$

$$\dot{q}_x = q_{x+k}^s$$

Základem této metody je výběr vhodných standardních tabulek a potřeba najít vhodný funkční vztah mezi \dot{q}_x a q_x^s . Potom parametry zvolené funkce odhadneme pomocí metody nejmenších čtverců. Pokud chceme získat graduované míry úmrtnosti \dot{q}_x podle vztahu $\dot{q}_x = a \cdot q_x^s + b$, vynásobíme obě strany rovnice hodnotou E_x a dostaneme:

$$E_x \dot{q}_x = a E_x q_x^s + b E_x,$$

protože $D_x = E_x \dot{q}_x$, platí $D_x = a E_x q_x^s + b E_x$ pro všechna x . Potom

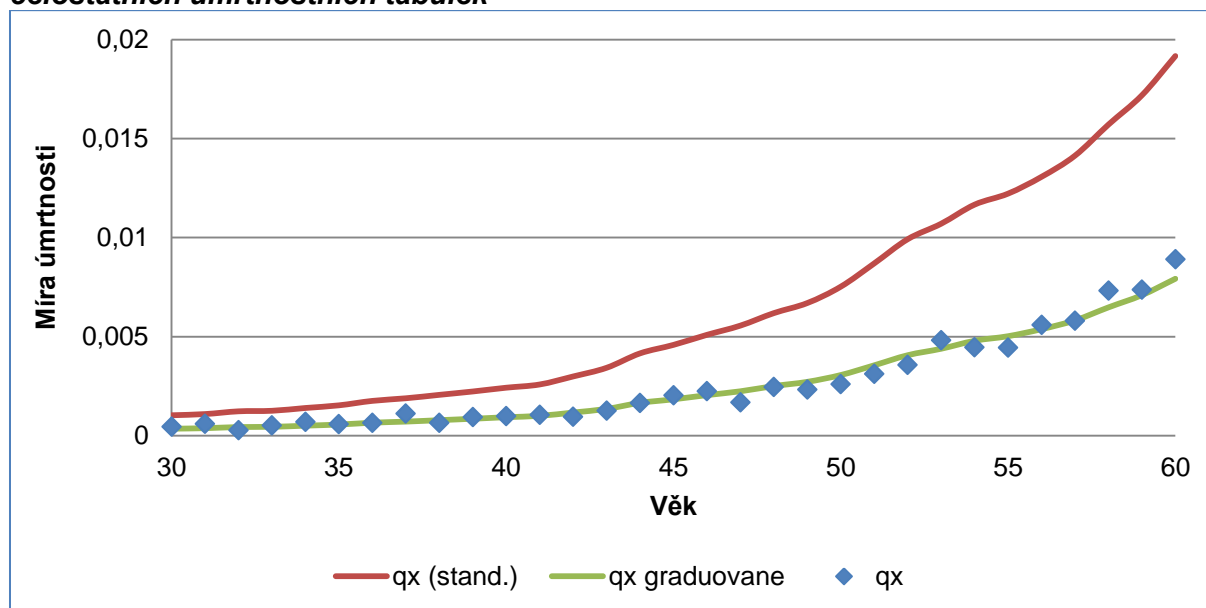
$$\sum_x D_x = a \sum_x E_x q_x^s + b \sum_x E_x.$$

Přitom $E_x q_x^s$ je očekávaný počet úmrtí ve věku x podle standardních tabulek a $E_x \dot{q}_x$ je očekávaný počet úmrtí ve věku x podle graduovaných měr úmrtnosti. V každém věku můžeme vypočítat parciální součty D_x , $E_x q_x^s$ a E_x . Potom dostáváme systém rovnic pro výpočet parametrů a a b :

$$\sum_{y \leq x} D_y = a \cdot \sum_{y \leq x} E_y q_y^s + b \cdot \sum_{y \leq x} E_y$$

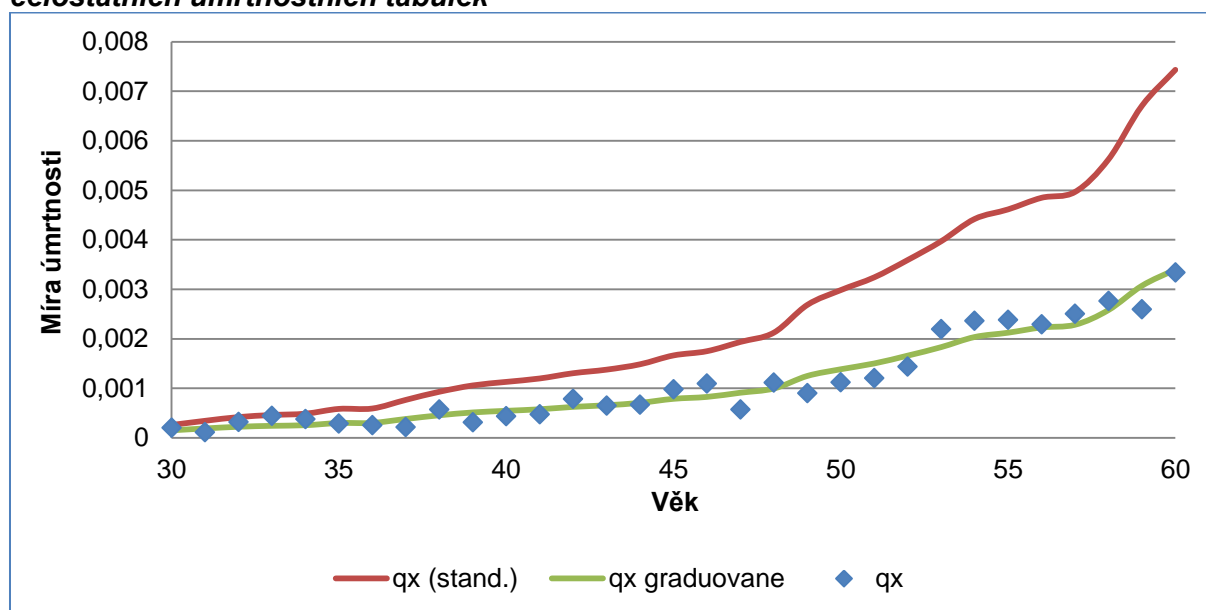
$$\sum_x \sum_{y \leq x} D_y = a \cdot \sum_x \sum_{y \leq x} E_y q_y^s + b \cdot \sum_x \sum_{y \leq x} E_y.$$

Obrázek č. 3: Výsledky graduace měr úmrtnosti pojištěných mužů v SR pomocí celostátních úmrtnostních tabulek



Zdroj: SÚ SR, vlastní zpracování

Obrázek č. 4: Výsledky graduace měr úmrtnosti pojištěných žen v SR pomocí celostátních úmrtnostních tabulek



Zdroj: SÚ SR, vlastní zpracování

Pro výpočet parametrů a a b ze zdrojových dat NBS pro graduaci měr úmrtnosti pojištěných osob byly využity pouze údaje za rok 2010 a jako standardní tabulky byly použity celostátní úmrtnostní tabulky Slovenské republiky rovněž za rok 2010, čím jsou data porovnatelná.

Výsledky graduace pomocí standardních tabulek pro muže a pro ženy ve věku od 30 do 60 let znázorňují obr. 3 a obr. 4. Pro obě pohlaví jsou graduované míry úmrtnosti pojištěné populace nižší ve srovnání s celostátními úmrtnostními tabulkami a tento rozdíl se zvyšuje s rostoucím věkem.

4. GRADUACE MĚR ÚMRTNOSTI PRO VYSOKÝ VĚK

Při odhadech měr úmrtnosti klesá počet žijících i počet zemřelých s věkem, což se projeví v menší přesnosti odhadů pravděpodobnosti úmrtí pomocí hrubých měr úmrtnosti a vyšší variabilitě hrubých měr. Platí to všeobecně, obzvláště však v případě pojištěné populace, neboť počet pojištěných ve věku nad 80 let je už skutečně nízký. Zřetelně to vidíme na obr. 1 a obr. 2, kde mají míry úmrtnosti přibližně od 90 let paradoxně klesající tendenci.

Tato skutečnost si žádá zvláštní metodu graduace měr úmrtnosti pro vysoký věk. V kapitole 2 jsme uvedli, že Gompertzova-Makehamova funkce neposkytuje dostatečně přesnou graduaci v celém věkovém rozpětí. Situace se ovšem změní, pokud budeme graduovat pouze hrubé míry úmrtnosti pro „vyšší věk“. Z empirických údajů se dá usoudit, že zhruba kolem 60 let věku začíná úmrtnost stoupat exponenciálně. Hodnoty hrubých měr úmrtnosti mezi 60. a 90. rokem věku se pokusíme graduovat pomocí Gompertzovy-Makehamovy funkce postupem popsaným v [4].

Gompertzova-Makehamova funkce má tři parametry a vzhledem k nepřesnosti hrubých měř úmrtnosti v individuálních hodnotách věku x budeme odhadovat parametry a , b , c pomocí souhrnných bodů:

$$G_1 = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} q_x = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}} \right)$$

$$G_2 = \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} q_x = \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}} \right)$$

$$G_3 = \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} q_x = \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}} \right).$$

Za x_0 můžeme dosadit například 60 a za $k = 10$. Tak vytvoříme součty od 60 do 69 let, od 70 do 79 let a od 80 do 89 let a využijeme zmíněné věkové rozpětí pro nejlepší odhad parametrů. Jakmile dostaneme součty pro jednotlivé intervaly věku, vypočítáme pomocnou proměnnou K_c dle vztahu:

$$K_c = c^{x_0+\frac{1}{2}} \times \frac{c^k - 1}{c - 1}.$$

Poté můžeme vypočítat hledané parametry a , b a c :

$$a = \frac{G_1 - bK_c}{k}$$

$$b = \frac{G_2 - G_1}{(c^k - 1) \times K_c}$$

$$c = \left(\frac{G_3 - G_2}{G_2 - G_1} \right)^{\frac{1}{k}}$$

Volbou konstanty k můžeme sledovat změnu citlivosti odhadu jednotlivých parametrů. Gompertzovu-Makehamovu křivku dostaneme po úpravě dosazením do vztahu:

$$q_x = a + bc^{x_0+0,5}.$$

Výsledky této graduace pro pojištěné muže a ženy SR a jejich porovnání zobrazuje obr. 7.

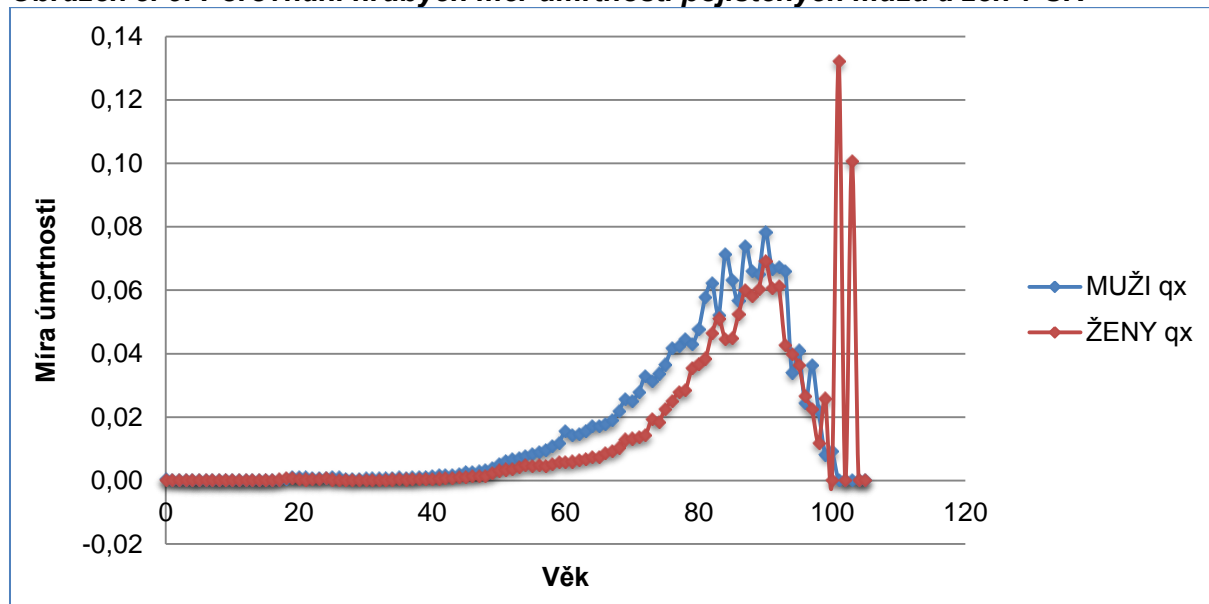
5. POROVNÁNÍ MODELŮ ÚMRTNOSTI POJIŠTĚNÉ POPULACE DLE POHLAVÍ

V této kapitole porovnáme modely úmrtnosti získané graduací hrubých měř úmrtnosti podle pohlaví. Z obrázku 5 je zřejmé, že hrubé míry úmrtnosti pro muže

a ženy se liší. Prvkem srovnatelným se státními úmrtnostními tabulkami zůstává mužská nadúmrtnost, patrná i na datech NBS.

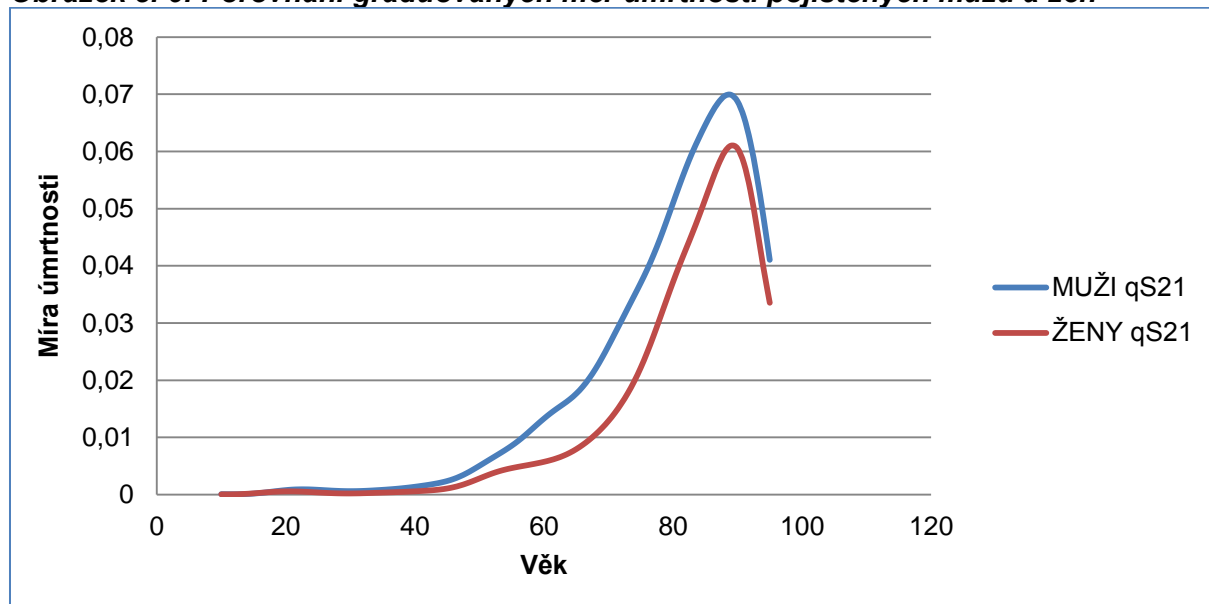
Na obrázku 6 je grafické porovnání výsledků nejlepší metody graduace, Spenserovy 21bodové metody pro pojištěné muže a ženy v SR. Zde už jsou viditelně odstraněny výkyvy křivky hrubých měř úmrtnosti, především pro vysoký věk. Nadále zůstává patrná přirozená mužská nadúmrtnost.

Obrázek č. 5: Porovnání hrubých měř úmrtnosti pojištěných mužů a žen v SR



Zdroj dat: NBS

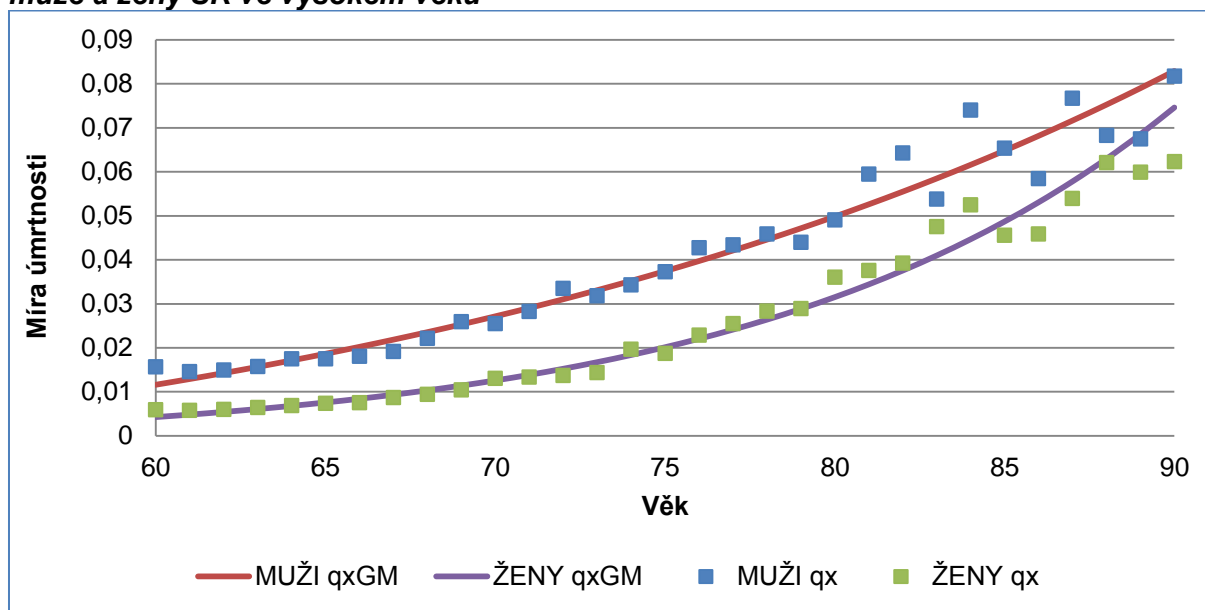
Obrázek č. 6: Porovnání graduovaných měř úmrtnosti pojištěných mužů a žen



Zdroj: vlastní zpracování

K vyrovnání úmrtnostních dat pro vysoký věk jsme použili Gompertzovu-Makehamovu funkci. Porovnání výsledků pro muže a ženy vidíme na obrázku 7.

Obrázek č. 7: Porovnání Gompertzova-Makehamova modelu úmrtnosti pro pojištěné muže a ženy SR ve vysokém věku



Zdroj: vlastní zpracování

6. ZÁVĚR

V článku jsou publikovány modely úmrtnosti pojištěných mužů a žen v SR v období 1999 – 2010. Tyto modely byly vytvořeny na základě dat slovenských pojišťoven, které poskytovaly v tomto období pojištění na úmrtí. Aplikací metod graduace na údaje hrubých měr úmrtnosti a testováním jejich hladkosti a přesnosti v celém intervalu věku byla jako nejvhodnější metoda graduace pro obě pohlaví vybrána Spenserova 21bodová metoda. Dále jsou v článku uvedeny pro obě pohlaví výsledky graduace pro vysoký věk a rovněž výsledky graduace pomocí standardních celostátních úmrtnostních tabulek SR v roce 2010. Výsledky jsou prezentovány v názorné grafické podobě. Z porovnání všech vytvořených modelů úmrtnosti podle pohlaví se potvrdily jejich významné rozdíly ve prospěch žen.

Článek byl zpracován s podporou projektu SGS FES 2014 č. SGSFES_2014003 s názvem Vědecko-výzkumné aktivity v Systémovém inženýrství a informatice.

LITERATURA

- [1] BENJAMIN, B. – POLLARD, S. H.: The Analysis of Mortality and other actuarial statistics. Edinburgh, London: Institute and Faculty of Actuaries, 1993. ISBN 978-0901066268.
- [2] CIPRA, T.: Pojistná matematika: teorie a praxe. 2. vyd. Praha: EKOPRESS, 2006. ISBN 80-86929-11-6.
- [3] CURRIE, I. D.: Modelling and Forecasting the Mortality of the Very Old. In: Astin Bulletin, 2011, č. 2, s. 419 – 427.
- [4] FIALA, T.: Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru. Praha: Vysoká škola ekonomická, 2005. ISBN 80-245-0821-4.
- [5] KLUFOVÁ, R. – POLÁKOVÁ, Z.: Demografické metody a analýzy: demografie české a slovenské populace. Praha: Wolters Kluwer ČR, 2010. ISBN 978-80-7357-546-5.

[6]KOSCHIN, F.: Aktuárská demografie: úmrtnost a životní pojištění. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1997. ISBN 80-7079-112-8.

[7]SIVAŠOVÁ, D.: Aktuárská demografie v prostředí konkurenčního pojistného trhu. Bratislava: EKONÓM, 2008. ISBN 978-80-225-2509-1.

Internetové zdroje:

[8]A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risks. Technical Dokument. JP Morgan, Pension Advisory Group, [online]. Dostupné z: <http://www.jpmorgan.com/pages/jpmorgan/investbk/solutions/lifemetrics/library>

[9]Úmrtnostní tabulky za SR. Dostupné z:

<http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=33032>

[10] Zverejňovanie údajov podľa smernice č. 2004/113/ES. NBS, [online]. Dostupné z:

<http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-poistovnictvom/zverejnovanie-udajov-podla-smernice-c-2004-113-es>

RESUMÉ

Znalost měr úmrtnosti je v životních pojišťovnách základem pro výpočet pojistného v homogenních tarifních skupinách pojištěných osob. Výsledky článku jednoznačně prokázaly významné rozdíly hodnot měr úmrtnosti podle věku a pohlaví. Podle zásady komerčního pojištění, že pojistné je úměrné velikosti pojištěného rizika, je proto nepochybně sporná platná Směrnice č. 2004/113/ES Evropské komise, ve které podle článku 5 použití pohlaví jako faktoru pro výpočet pojistného a slev nesmí mít za následek rozdíly v pojistném a slevách.

RESUME

The basis for the calculation of premiums in life insurance companies in homogenous groups of tariff persons is the knowledge of mortality rates. The results of the article have clearly demonstrated significant differences in the values of mortality rates by age and sex. According to the principles of commercial insurance, the premium is proportional to the size of the insured risk, so undoubtedly the controversial Council Directive 2004/113/EC by which in accordance with the Article 5 the use of sex as a factor in the calculation of premiums and discounts might not result in different premiums and discounts.

PROFESIJNÝ ŽIVOTOPIS

Prof. RNDr. Viera Pacáková, PhD., se v průběhu svého dlouholetého působení na Katedře statistiky Ekonomické univerzity v Bratislavě svojí pedagogickou a publikační činností výrazně zasloužila o rozvoj statistických metod a jejich aplikaci v ekonomické a sociální praxi. Výrazně přispěla také k rozvoji aktuárských věd na Slovensku a k výchově aktuárů. V současné době působí na Ústavu matematiky a kvantitativních metod na Fakultě ekonomicko-správní Univerzity Pardubice, kde garantuje studijní obor Pojistné inženýrství.

Bc. Vladimír Bureš se v současnosti připravuje k ukončení studia na studijním oboru Pojistné inženýrství na Fakultě ekonomicko-správní Univerzity Pardubice. Článek byl zpracován na základě výsledků jeho diplomové práce, vypracované pod vedením prof. V. Pacákové.

KONTAKT

viera.pacakova@upce.cz
bures.vlada@gmail.com