SLOVENSKÁ ŠTATISTIKA a DEMOGRAFIA

SLOVAK STATISTICS and DEMOGRAPHY

1/2015
ročník/volume 25

Recenzovaný vedecký časopis so zameraním na prezentáciu moderných štatistických a demografických metód a postupov.

Scientific peer-reviewed journal focusing on the presentation of modern statistical and demographic methods and procedures.

Článok/Article: 4

Typ článku/Type of article: vedecký článok/scientific article

Strany/Pages: 33 – 44

Dátum vydania/Publication date: 15. január 2015/January 15, 2015

Michal PÁLEŠ
Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave

VYUŽITIE A KONŠTRUKCIA ÚMRTNOSTNÝCH TABULIEK V ŽIVOTNOM POISTENÍ

USE AND CONSTRUCTION OF MORTALITY TABLES IN LIFE INSURANCE

ABSTRAKT
Teoretické znalosti aktuára sa opierajú najmä o poznatky finančnej matematiky, stochastických modelov, aktuárskej matematiky a demografie, životného a neživotného poistenia, teórie rizika i poistenia investícií. Príspevok je zameraný na oblasť demografie – konkrétne na konštrukciu úmrtnostných tabuliek a modelovanie úmrtnosti, graduáciu a testovanie presnosti graduácie na základe reálnych údajov z poistnej praxe v kontexte s funkciou aktuára. Pri praktickej ukážke názorne postupujeme na základe vytýčeného postupu konštrukcie úmrtnostnej tabuľky s využitím softvéru MS Excel.

ABSTRACT
Theoretical knowledge of actuaries is associated with financial mathematics, stochastic models, actuarial mathematics and demography, life and non-life insurance, the theory of risk and insurance investments. This paper is focused on demography – namely on the construction of mortality tables and modelling mortality, graduation and testing the accuracy of graduation based on real data from the insurance practice in the context of the actuarial function. Practical examples are illustrated on the basis of defined process of the construction of mortality tables using MS Excel software.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ
úmrtnosť, konštrukcia úmrtnostnej tabuľky, graduácia, štatistické testy, počítačová podpora

KEY WORDS
mortality, mortality table construction, graduation, statistical tests, software support

1. ÚVOD

Analyzovanie úmrtnosti a konštrukcia úmrtnostných tabuliek je jednou z úloh aktuára vyplývajúca z jeho funkcie v poisťovni. Zlepšovanie úmrtnostných pomerov zapríčiňuje predimenzovanie skupiny osôb s vysokým vekom. Táto skutočnosť má negatívny dosah nielen na ekonomiku štátu, ale i na ekonomiku samotnej poisťovne.

V teoretickej časti vymedzíme pojem úmrtnosť a stručne opíšeme hlavné oblasti, ktoré musí aktuár naštudovať tak z teoretického, ako aj matematického hľadiska, a to najmä modelovanie úmrtnosti, konštrukcia úmrtnostných tabuliek, metódy graduácie a testovanie presnosti graduácie.

Cieľom príspevku je ukázať, ako sa v praxi konštruujú úmrtnostné tabuľky. Z tohto dôvodu sme vysvetľovanie základnej teórie zredukovali na minimum. Všetky potrebné vzťahy a postupy uvádzame v praktickej časti. Na reálnych údajoch z poistnej praxe zostavíme podrobnú úmrtnostnú tabuľku a vykonáme graduáciu hodnôt pravdepodobnosti úmrtia. Graduované hodnoty následne otestujeme, aby sme zistili, či ich môžeme považovať za dostatočne presné. Pri všetkých výpočtoch využijeme dostupný MS Excel, pričom v ukážkach a výstupoch dbáme aj na didaktický charakter príspevku. Teoretický aparát možno v prípade záujmu nájsť v rozsiahlej ponuke odbornej literatúry (Cipra, Fiala, Sivašová, Benjamin-Pollard a i.).

2. TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ

Úmrtnosť je jedným zo základných demografických procesov a spolu s pôrodnosťou tvorí základnú zložku demografickej reprodukcie populácie. Z aktuárskeho hľadiska je okamih úmrtia náhodný jav a definuje sa pomocou pravdepodobnostných funkcií. Úmrtnosť je hlavná časť aktuárskej (poistnej bázy).

Úmrtnosť ovplyvňujú genetické, ekologické, sociálno-ekonomické a medicínske faktory. Na jej vyjadrenie sa používajú viaceré ukazovatele, ako napr.:

- hrubá miera úmrtnosti,
- špecifická miera úmrtnosti,
- intenzita úmrtnosti.

Priebeh úmrtnosti môžeme modelovať pomocou spojitých funkcií zákonmi úmrtnosti, ktorými sú:

- konštantná miera úmrtnosti,
- Moivrov zákon úmrtnosti,
- Gompertzov zákon úmrtnosti,
- Makehamov zákon úmrtnosti.

V aktuárskej praxi sú analýzy úmrtnosti dôležitým faktorom na stanovenie výšky poistného v životnom poistení. Tieto analýzy môžeme uskutočňovať napríklad na základe vývoja rôznych ukazovateľov spojených s úmrtnosťou, ktoré sú evidované v rámci štatistických databáz pre rôzne obdobia a územné oblasti.

Úmrtnostné tabuľky sú nástrojom na zisťovanie úmrtnostných pomerov danej populácie a patria k základným nástrojom matematiky pre životné poistenie. Poskytujú informácie o pravdepodobnosti úmrtia a ďalších ukazovateľoch podľa vekovej skupiny a pohlavia. Môžeme ich členiť najmä podľa záznamu opisovanej skutočnosti na generačné a bežné (prierezové) úmrtnostné tabuľky a podľa dĺžky sledovaného vekového intervalu na úplné a skrátené úmrtnostné tabuľky.

Postup konštrukcie úmrtnostnej tabuľky môžeme zhrnúť do nasledujúcich bodov:

- výpočet špecifických mier,
- výpočet pravdepodobností úmrtia,
- graduácia (vyrovnanie) pravdepodobností úmrtia a extrapolácia klesajúcich pravdepodobností úmrtia vo vyšších vekoch,
- testovanie hladkosti graduovaných hodnôt,
- testovanie presnosti graduovaných hodnôt,
- výpočet ostatných stĺpcov úmrtnostnej tabuľky,
- modifikácia posledného riadka tabuľky.

V kontexte so štruktúrou opísanou v úvode, príspevok neobsahuje a neopisuje všetky metódy graduácie a následne všetky testy presnosti graduovaných hodnôt.

Ukazovatele (stĺpce úmrtnostnej tabuľky), ktoré budeme analyzovať, sú:

- špecifická miera úmrtnosti,
- pravdepodobnosť úmrtia vo veku *x*,
- pravdepodobnosť dožitia vo veku *x*,
- počet dožívajúcich sa veku *x*,
- počet zomretých vo veku *x*,
- priemerný počet žijúcich vo veku *x*,
- počet zostávajúcich rokov života vo veku *x*,
- stredná dĺžka života vo veku *x*.

Vlastné úmrtnostné tabuľky poisťovne často konštruujú na základe malých poistných kmeňov. Odhady jednotlivých ukazovateľov sa potom môžu značne líšiť od skutočných hodnôt. Tieto odchýlky sa dajú odstrániť graduáciou úmrtnostných tabuliek, ktorej cieľom je vyrovnať v úmrtnostných tabuľkách hrubé pozorovania dostatočne hladkou krivkou, kde sa vyžaduje pravidelný vývoj pri prechode medzi susednými vekmi. Následne tieto informácie z odhadov získaných pri susedných vekoch môžeme využiť na zdokonalenie odhadov v každom veku *x*. Ďalej treba posúdiť, či je graduácia dostatočne hladká (využitím kritérií hladkosti) a presná (využitím testov presnosti). Metódy graduácie a testy presnosti graduovaných hodnôt prehľadne uvádza tabuľka č. 1.

Tabuľka č. 1: Prehľad metód graduácie a testov presnosti graduácie

<table>
<tr><td rowspan="5">METÓDY GRADUÁCIE</td><td colspan="2">• grafické</td></tr>
<tr><td>• parametrické</td><td>Gompertzova-Makehamova funkcia</td></tr>
<tr><td>• splínové</td><td>kubická splínová metóda
lineárna splínová metóda</td></tr>
<tr><td colspan="2">• pomocou štandardných tabuliek</td></tr>
<tr><td>• neparametrické</td><td>Wittsteinova metóda
Schärtlinova metóda</td></tr>
<tr><td>TESTY PRESNOSTI GRADUÁCIE</td><td colspan="2">• χ test
• znamienkový test
• test kumulovaných odchýlok
• test zmeny znamienok
• Stevensonov test</td></tr>
</table>

Zdroj: vlastné spracovanie

3. ANALYZOVANÉ ÚDAJE A ICH ZDROJ

Vstupné údaje čerpáme z databázy Národnej banky Slovenska, *(http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-poistovnictvom /zverejnovanie-udajov-podla-smernice-c-2004-113-es, ďalej „NBS“)*, ktorá zverejňuje štatistické údaje o poistených osobách získané od poisťovní. Údaje sa obvykle triedia podľa pohlavia, veku a konkrétnych poistných rizík.

Vzhľadom na predmetnú analýzu použijeme len údaje týkajúce sa úmrtnosti poistených osôb za sledované obdobie rokov 2005 – 2010. Vychádzame teda z tabuľky č. 2, ktorá zobrazuje expozíciu voči riziku (t. j. počet poistených osôb na úmrtie podľa veku upravený podľa dĺžky poistnej zmluvy; vypočítame ako súčet pomerov počtu dní poistného krytia v danom roku a počtu dní v kalendárnom roku) a počet poistných udalostí (tzn. počet poistných udalostí sledovaného rizika úmrtnosti s nenulovou výškou škody, ktoré vznikli v sledovanom roku).

Tieto ukazovatele zodpovedajú veku osoby 0 – 100 rokov a sú upravené spoločne pre mužov aj ženy (pre viac informácií pozri problematiku diskriminácie pri určovaní výšky poistného a legislatívu EÚ, napr. *http://eur-lex.europa.eu*). Pri práci s údajmi je vhodné využívať pracovné hárky zošita a funkcie MS Excel.

Tabuľka č. 2: Vstupné údaje

Vek	*Phl*	*Expo úmrtie*	*Počet PU*	*Vek*	*Phl*	*Expo úmrtie*	*Počet PU*	*Vek*	*Phl*	*Expo úmrtie*	*Počet PU*	*Vek*	*Phl*	*Expo úmrtie*	*Počet PU*
0	M+Ž	30702,99	13	26	M+Ž	454408,2	126	52	M+Ž	488419,2	1561	78	M+Ž	7891,19	274
1	M+Ž	96461,07	23	27	M+Ž	494095,6	171	53	M+Ž	473950,1	1732	79	M+Ž	6395,63	220
2	M+Ž	110321,5	25	28	M+Ž	518345,0	218	54	M+Ž	456276,8	1848	80	M+Ž	5257,93	226
3	M+Ž	115103,4	16	29	M+Ž	537758,5	186	55	M+Ž	431601,3	1899	81	M+Ž	4436,40	208
4	M+Ž	118388,1	9	30	M+Ž	571094,2	196	56	M+Ž	400333,0	2020	82	M+Ž	3946,31	189
5	M+Ž	122139,4	13	31	M+Ž	607306,7	259	57	M+Ž	369434,6	1985	83	M+Ž	3571,56	158
6	M+Ž	127707,4	20	32	M+Ž	637903,9	289	58	M+Ž	337714,1	2169	84	M+Ž	3285,18	177
7	M+Ž	135381,8	11	33	M+Ž	661117,2	281	59	M+Ž	302823,7	2076	85	M+Ž	2545,38	126
8	M+Ž	144610,7	16	34	M+Ž	678363,9	354	60	M+Ž	264764,9	2011	86	M+Ž	1949,69	78
9	M+Ž	156157,1	20	35	M+Ž	692120,1	383	61	M+Ž	231306,8	2023	87	M+Ž	1705,99	92
10	M+Ž	168220,0	11	36	M+Ž	701281,4	445	62	M+Ž	205598,7	2014	88	M+Ž	1441,33	83
11	M+Ž	181905,6	20	37	M+Ž	699324,6	449	63	M+Ž	187062,5	2008	89	M+Ž	1201,64	61
12	M+Ž	200498,4	20	38	M+Ž	693905,0	548	64	M+Ž	173097,3	2158	90	M+Ž	1017,02	54
13	M+Ž	224510,4	32	39	M+Ž	689479,1	523	65	M+Ž	97933,21	1161	91	M+Ž	953,69	62
14	M+Ž	245241,8	45	40	M+Ž	685930,3	586	66	M+Ž	29385,16	304	92	M+Ž	911,53	52
15	M+Ž	266281,4	40	41	M+Ž	682880,5	683	67	M+Ž	22610,68	258	93	M+Ž	872,80	52
16	M+Ž	285923,4	56	42	M+Ž	672471,3	703	68	M+Ž	20789,14	303	94	M+Ž	849,19	25
17	M+Ž	311502,7	68	43	M+Ž	654945,0	749	69	M+Ž	20333,21	350	95	M+Ž	834,88	25
18	M+Ž	342281,1	84	44	M+Ž	639924,9	871	70	M+Ž	18034,19	333	96	M+Ž	817,01	26
19	M+Ž	264844,3	94	45	M+Ž	614568,9	965	71	M+Ž	16462,60	326	97	M+Ž	735,86	16
20	M+Ž	224682,0	88	46	M+Ž	588017,4	999	72	M+Ž	17081,52	397	98	M+Ž	637,07	15
21	M+Ž	262924,4	110	47	M+Ž	559622,0	1045	73	M+Ž	17800,79	414	99	M+Ž	563,53	5
22	M+Ž	308302,3	113	48	M+Ž	539156,2	1118	74	M+Ž	16232,86	426	100	M+Ž	485,01	10
23	M+Ž	350398,5	115	49	M+Ž	527994,2	1274	75	M+Ž	13763,90	383				
24	M+Ž	391055,3	160	50	M+Ž	513443,9	1245	76	M+Ž	11377,76	360				
25	M+Ž	427578,2	165	51	M+Ž	499087,5	1426	77	M+Ž	9524,23	296				

Zdroj: vlastné spracovanie (podľa [4], [8])

4. PRAKTICKÁ UKÁŽKA

Na základe dostupných údajov z tabuľky č. 2, ktoré sme špecifikovali v časti 3 (Analyzované údaje a ich zdroj), vypočítame všetky ukazovatele, ktoré chceme zahrnúť do pripravovanej ***podrobnej úmrtnostnej tabuľky***. Ukážky výpočtov budeme prezentovať pre 65-ročnú osobu, teda *x* = 65.

Špecifická miera úmrtnosti m_x

$$m_x = \frac{D_x}{P_{x\,,}}$$

kde D_x je počet zomretých a P_x je počet žijúcich vo veku *x* (stredný stav) za sledované obdobie. V našich výpočtoch bude D_x predstavovať sumu poistných udalostí za sledované obdobie a P_x sumu expozícií voči riziku.

Potom pre náš prípad platí

$$m_{65} = \frac{D_{65}}{P_{65}} = \frac{1161}{97933{,}21} = 0{,}011855.$$

Pravdepodobnosť úmrtia q_x, ktorá vyjadruje pravdepodobnosť, že osoba vo veku *x* zomrie do jedného roka, teda pred dosiahnutím veku *x* + 1.

$$q_x = 1 - e^{-m_x},$$

Platí, že

$$q_{65} = 1 - e^{-m_{65}} = 0{,}011785.$$

Pravdepodobnosť dožitia p_x

$$p_x = 1 - q_x,$$

pričom p_x vyjadruje pravdepodobnosť, že *x*-ročná osoba sa dožije veku *x* + 1.

Potom pre *x* = 65

$$p_{65} = 1 - 0{,}011785 = 0{,}988215.$$

Počet dožívajúcich sa veku *x* označujeme l_x, pričom platí, že

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Je zrejmé, že pre *n* = 1 platí

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}\,.$$

a ak $p_x + q_x = 1$, tak

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}\,.$$

Potom ak l_0 je koreňom úmrtnostnej tabuľky, kde uvažujeme $l_0 = 100\,000$ a $p_0 = 0{,}999577$, tak $l_1 = 0{,}999577 \cdot 100\,000 = 99957{,}7$. Pre náš prípad, ak *x* = 65, platí, že

$$l_{65} = 88573{,}7.$$

Počet zomretých vo veku *x* d_x

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Pre náš prípad

$$d_{65} = l_{65} - l_{66} = 88573{,}7 - 87529{,}8 = 1043{,}84.$$

Priemerný počet žijúcich vo veku *x* L_x

$$L_x \cong \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

vyjadruje priemerný počet osôb, ktoré v danej populácii žijú vo veku uvedenom v úmrtnostných tabuľkách. V našom prípade ho aproximatívne vypočítame ako

$$L_{65} \cong 0{,}5 \cdot (l_{65} + l_{66}) = 0{,}5 \cdot (88573{,}7 + 87529{,}8) = 88051{,}75.$$

Počet zostávajúcich rokov života vo veku *x* T_x

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \cdots + L_\omega$$

vyjadruje počet rokov života, ktoré má tabuľková generácia (nie jednotlivec) v danom veku pred sebou, kde ω = 100. V našom prípade ju určíme ako

$$T_{65} = 88051{,}8 + \cdots + 13287{,}9 = 1995233{,}5.$$

Za najdôležitejší ukazovateľ úmrtnostných tabuliek sa považuje stredná dĺžka života vo veku *x*

$$e_x = \frac{T_x}{l_x},$$

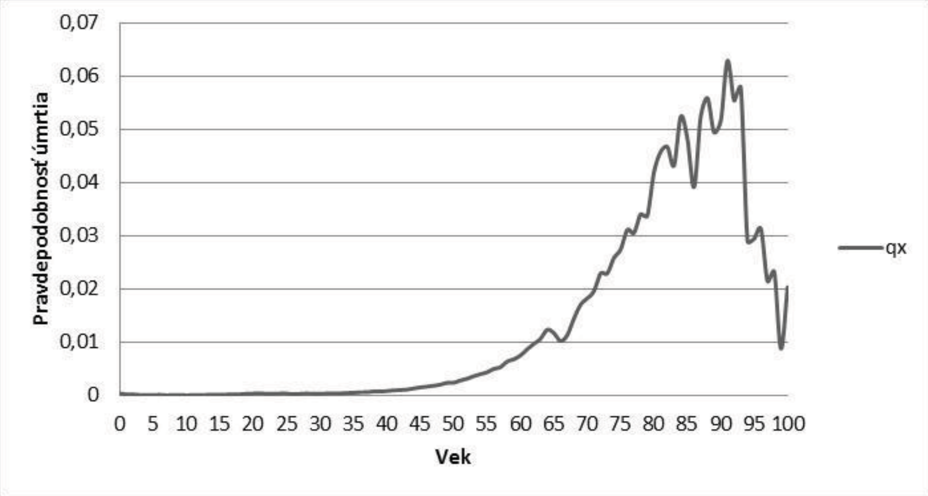
teda ukazovateľ, ktorý vyjadruje úmrtnostné pomery vo všetkých vekových skupinách. Je to počet rokov, ktoré by prežila poistená osoba, ak by sa úmrtnostné pomery nezmenili dostatočne dlho. V našom prípade ho určíme takto:

$$e_{65} = \frac{T_{65}}{l_{65}} = \frac{1995234}{88573{,}7} = 22{,}5263.$$

Úmrtnostná tabuľka sa ukončí riadkom pre vek 100 a viac rokov tým, že sa hodnoty L_x a T_x nahradia hodnotou výrazu $\mathrm{l}_{100} - 0{,}5\mathrm{l}_{100}\mathrm{q}_{100}$. Všetky predtým uvedené ukazovatele (funkcie) je možné naprogramovať v prostredí MS Excel a dopočítať zvyšné hodnoty. Tabuľka č. 3 potom zobrazuje finálnu podrobnú úmrtnostnú tabuľku pre mužov aj ženy (špecificky sa tu aj ďalej zameriame vo výstupoch na vek 65+). Stĺpce ukazovateľov m_x a p_x úmrtnostná tabuľka nemusí obsahovať.

Obrázok č. 1 zobrazuje priebeh nevyrovnaných (skutočných) hodnôt pravdepodobnosti úmrtia q_x. Môžeme si všimnúť, že pravdepodobnosť úmrtia začína vekom *x* = 80 dosahovať veľké výkyvy, keďže poisťovne nechcú tieto osoby poisťovať na úmrtie z dôvodu vysokého rizika. Graduácia môže eliminovať (vyhladzovať) tieto nesystematické pravdepodobnosti, ktoré nemajú racionálne vysvetlenie a vznikli malým počtom údajov z poistného kmeňa.

Obrázok č. 1: Vývoj ukazovateľa (pravdepodobnosť úmrtia)



Zdroj: vlastné spracovanie

Tabuľka č. 3: Úplná úmrtnostná tabuľka (negraduované hodnoty q_x)

Vek	m_x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
65	0,011855	0,011785	0,988215	88573,7	1043,84	88051,8	1995234	22,5263
66	0,010345	0,010292	0,989708	87529,8	900,859	87079,4	1907182	21,7889
67	0,011411	0,011346	0,988654	86629	982,864	86137,6	1820103	21,0103
68	0,014575	0,014469	0,985531	85646,1	1239,23	85026,5	1733965	20,2457
69	0,017213	0,017066	0,982934	84406,9	1440,48	83686,7	1648938	19,5356
70	0,018465	0,018296	0,981704	82966,4	1517,91	82207,5	1565252	18,8661
71	0,019802	0,019608	0,980392	81448,5	1597,02	80650	1483044	18,2084
72	0,023241	0,022973	0,977027	79851,5	1834,47	78934,2	1402394	17,5625
73	0,023257	0,022989	0,977011	78017	1793,54	77120,2	1323460	16,9637
74	0,026243	0,025902	0,974098	76223,5	1974,32	75236,3	1246340	16,3511
75	0,027826	0,027443	0,972557	74249,2	2037,61	73230,4	1171104	15,7726
76	0,031641	0,031145	0,968855	72211,6	2249,05	71087	1097873	15,2036
77	0,031079	0,030601	0,969399	69962,5	2140,9	68892	1026786	14,6762
78	0,034722	0,034126	0,965874	67821,6	2314,51	66664,3	957894	14,1237
79	0,034399	0,033814	0,966186	65507,1	2215,03	64399,6	891230	13,6051
80	0,042983	0,042072	0,957928	63292,1	2662,83	61960,6	826830	13,0637
81	0,046885	0,045803	0,954197	60629,2	2776,98	59240,7	764870	12,6155
82	0,047893	0,046764	0,953236	57852,2	2705,4	56499,5	705629	12,1971
83	0,044239	0,043274	0,956726	55146,8	2386,44	53953,6	649129	11,7709
84	0,053878	0,052453	0,947547	52760,4	2767,43	51376,7	595176	11,2807
85	0,049501	0,048296	0,951704	49993	2414,46	48785,7	543799	10,8775
86	0,040006	0,039217	0,960783	47578,5	1865,87	46645,6	495013	10,4041
87	0,053927	0,052499	0,947501	45712,6	2399,87	44512,7	448368	9,80839
88	0,057585	0,055958	0,944042	43312,8	2423,71	42100,9	403855	9,32415
89	0,050764	0,049497	0,950503	40889,1	2023,88	39877,1	361754	8,84721
90	0,053096	0,051711	0,948289	38865,2	2009,76	37860,3	321877	8,28188
91	0,06501	0,062942	0,937058	36855,4	2319,76	35695,5	284017	7,70624
92	0,057047	0,055451	0,944549	34535,7	1915,03	33578,2	248321	7,19028
93	0,059578	0,057838	0,942162	32620,6	1886,73	31677,3	214743	6,58304
94	0,02944	0,029011	0,970989	30733,9	891,621	30288,1	183066	5,95647
95	0,029945	0,029501	0,970499	29842,3	880,37	29402,1	152777	5,1195
96	0,031823	0,031322	0,968678	28961,9	907,145	28508,3	123375	4,25992
97	0,021743	0,021508	0,978492	28054,8	603,413	27753,1	94867	3,38149
98	0,023545	0,02327	0,97673	27451,4	638,793	27132	67114	2,44483
99	0,008873	0,008833	0,991167	26812,6	236,846	26694,1	39982	1,49117
100	0,020618	0,020407	0,979593	26575,7	26575,7	13287,9	13287,9	0,5

Zdroj: vlastné spracovanie

Jednou z najpoužívanejších ***metód graduácie*** je neparametrická ***Wittsteinova 9-bodová metóda.*** Na jej aplikáciu (programovanie funkcie) môžeme opätovne využiť MS Excel. Graduované hodnoty $\hat{q}_x$, ktoré pre vek 65+ uvádza tabuľka č. 4, vypočítame podľa vzťahu

$$\hat{q}_x = \frac{1}{25} \cdot [5q_x + 4(q_{x-1} + q_{x+1}) + 3(q_{x-2} + q_{x+2}) + 2(q_{x-3} + q_{x+3}) + (q_{x-4} + q_{x+4})].$$

Zo vzťahu vyplýva, že váhy jednotlivých pravdepodobností úmrtia sú súmerné okolo stredu, t. j. hodnoty q_x. So zvyšujúcim sa vekom x sa váhy zmenšujú. Wittsteinova metóda graduácie je vo väčšine prípadov aplikovateľná na všetky veky.

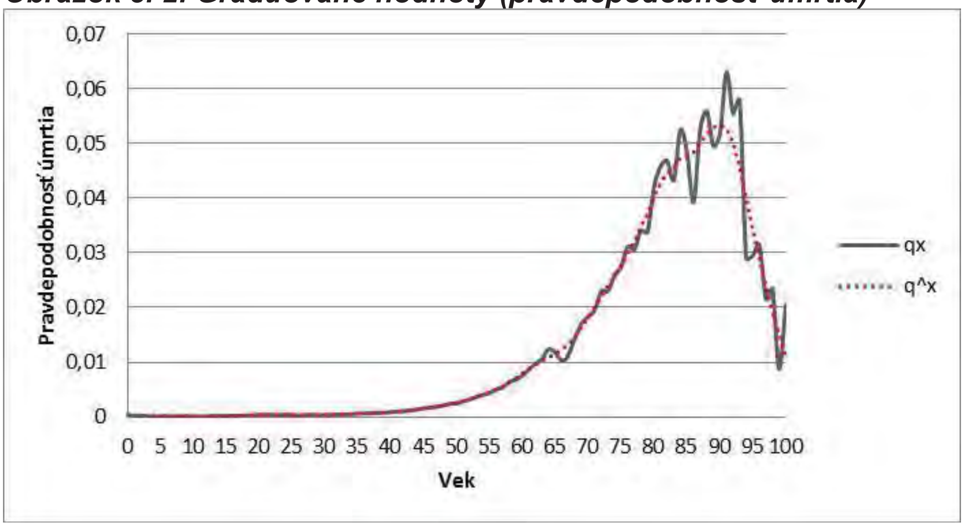
Tabuľka č. 4: Graduované hodnoty q_x (W)

Vek	q_x	$q\hat{}_x$	Vek	q_x	$q\hat{}_x$
65	0,011785	0,0115972	83	0,043274	0,045777
66	0,010292	0,0123236	84	0,052453	0,0472449
67	0,011346	0,0133594	85	0,048296	0,0478489
68	0,014469	0,0147962	86	0,039217	0,0483406
69	0,017066	0,0164222	87	0,052499	0,0500447
70	0,018296	0,0182146	88	0,055958	0,0516375
71	0,019608	0,0201125	89	0,049497	0,0527982
72	0,022973	0,0220992	90	0,051711	0,0532576
73	0,022989	0,0239259	91	0,062942	0,052692
74	0,025902	0,0258573	92	0,055451	0,0499127
75	0,027443	0,0277517	93	0,057838	0,0456575
76	0,031145	0,0298654	94	0,029011	0,0399444
77	0,030601	0,032104	95	0,029501	0,0342437
78	0,034126	0,034684	96	0,031322	0,0290676
79	0,033814	0,0371844	97	0,021508	0,0239034
80	0,042072	0,0401138	98	0,02327	0,0192366
81	0,045803	0,0427071	99	0,008833	0,0150217
82	0,046764	0,0444506	100	0,020407	0,0112606

Zdroj: vlastné spracovanie

Obrázok č. 2 následne prezentuje skutočné a graduované hodnoty pomocou Wittsteinovej metódy graduácie (bodkovaná červená čiara).

Obrázok č. 2: Graduované hodnoty (pravdepodobnosť úmrtia)



Zdroj: vlastné spracovanie

Je zrejmé, že pravdepodobnosti úmrtia sú spoľahlivé asi do veku 80 rokov, pretože počet zomretých sa začne prudko zmenšovať vplyvom rastúcej úmrtnosti. Výkyvy v rastúcej tendencii (pozri tabuľku č. 4) pravdepodobnosti úmrtia vo vyšších vekoch možno ďalej eliminovať ***extrapoláciou*** hodnôt (***Gompertzovou-Makehamovou formulou***). Tú, ako už bolo spomenuté, pre rozsiahlosť teoretického aparátu v príspevku neuvádzame (pozn. túto metódu nie je možné použiť na celý vekový interval). Následne majú graduované hodnoty pravdepodobnosti úmrtia v sledovanom intervale (86+) rastúci trend (pozri tabuľku č. 5).

Tabuľka č. 5: Graduované hodnoty q_x (GM)

Vek	q_x	$q\hat{}_x$	*Vek*	q_x	$q\hat{}_x$
86	0,039217	0,02553	94	0,029011	0,04117
87	0,052499	0,02716	95	0,029501	0,04360
88	0,055958	0,02888	96	0,031322	0,04615
89	0,049497	0,03068	97	0,021508	0,04884
90	0,051711	0,03257	98	0,023270	0,05166
91	0,062942	0,03456	99	0,008833	0,05462
92	0,055451	0,03666	100	0,020407	0,05773
93	0,057838	0,03886			

Zdroj: vlastné spracovanie

Posledná analýza, ktorou sa v tomto článku zaoberáme, súvisí s ***testovaním presnosti graduovaných hodnôt***. Skúmame teda, či je v našom prípade počet zomretých D_x, t. j. počet poistných udalostí, v každej vekovej skupine blízky očakávanému počtu, ktorý sme vypočítali na základe graduácie. Vzhľadom na to, že najznámejší chí-kvadrát test nemožno pri tejto analýze považovať za dostatočne presný, ukážeme si ďalšie testy presnosti graduovaných hodnôt pre spomínanú Wittsteinovu 9-bodovú metódu.

Pri dostatočne veľkom počte pozorovaných osôb na základe Moivreovej-Laplaceovej centrálnej limitnej vety sa D_x riadia približne normálnym rozdelením, pri ktorom pre strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej D_x platí:

$$E(D_x) = E_x q_x,\ \ D(D_x) = E_x p_x q_x.$$

Potom náhodná premenná $Z_x \sim N(0;1)$

$$Z_x = \frac{D_x - E_x\hat{q}_x}{\sqrt{E_x\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}},$$

kde $\hat{q}_x$ je graduovaná hodnota, q_x a E_x je doba expozície, ktorá zohráva dôležitú úlohu pri odhade q_x, a určíme ju ako

$$E_x = \sum_{i=1}^{n}(t_i - s_i),$$

pričom každý jedinec patrí do poistného kmeňa od veku $x + s_i$ do $x + t_i$; $0 \leq s_i < t_i \leq 1$.

Platí, že

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x + \sum_{i\in I}(1-t_i)}.$$

Tabuľka č. 6 zobrazuje výpočet premennej Z_x pre Wittsteinovu metódu a vek 65+. Táto premenná je východisková pre väčšinu testov graduovaných hodnôt (podľa tabuľky č. 1), z ktorých si bližšie vysvetlíme znamienkový test.

Znamienkový test odhalí nedostatky graduácie pri veľkom počte kladných alebo záporných odchýlok. Ktorákoľvek hodnota odchýlky Z_x by mala byť kladná alebo záporná s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Celkový počet kladných odchýlok má binomické rozdelenie, označme náhodnú premennú ako Z_x^+, teda

$$Z_x^+ \sim Bi(n; 0{,}5),$$

kde *n* je počet všetkých vekových skupín.

Hypotézy formulujeme takto:

H_0: graduácia je na hladine významnosti α prijateľná,
H_1: graduácia nie je na hladine významnosti α prijateľná.

Nulovou hypotézou zisťujeme, či nenastáva veľký počet kladných alebo záporných hodnôt s pravdepodobnosťou 95 %. Zamietame ju, ak celkový počet kladných odchýlok prekročí kritickú oblasť, ktorá je určená kritickými hodnotami 2,5 % a 97,5-percentným kvantilom binomického rozdelenia s parametrami $n;\ p = \frac{1}{2}$.

V našom prípade nech α = 0,05, *n* = 36, potom kritické hodnoty označíme k_1, k_2 (na výpočet využijeme funkciu *BINOM.INV*)

$$k_1 = 12;\ k_2 = 24$$

a testovaciu charakteristiku vypočítame z tabuľky č. 6 s využitím funkcie *COUNTIF* ako Z_x^+ = 21.

Tabuľka č. 6: Testovanie presnosti graduovaných hodnôt (znamienkový test)

Vek	q_x	$q\hat{}_x$	D_x	E_x	$q\hat{}_x \cdot E_x$	$D_x - (q\hat{}_x \cdot E_x)$	$\sqrt{q\hat{}_x \cdot E_x \cdot (1-q\hat{}_x)}$	Z_x
65	0,011785	0,011597	1161	97932,38	1135,741	25,258555	33,50477614	0,753879
66	0,010292	0,012324	304	29384,94	362,1294	-58,1294237	18,91207739	**-3,073667**
67	0,011346	0,013359	258	22610,49	302,0617	-44,0616757	17,26343897	**-2,552312**
68	0,014469	0,014796	303	20789,01	307,5992	-4,5992275	17,40827147	**-0,264198**
69	0,017066	0,016422	350	20333,1	333,915	16,085033	18,12267462	0,887564
70	0,018296	0,018215	333	18034,06	328,484	4,5159988	17,95830681	0,251471
71	0,019608	0,020112	326	16462,53	331,1023	-5,1023439	18,01230287	**-0,28327**
72	0,022973	0,022099	397	17081,49	377,4865	19,5134821	19,21313048	1,015633
73	0,022989	0,023926	414	17800,74	425,8983	-11,898288	20,38892583	**-0,583566**
74	0,025902	0,025857	426	16232,83	419,7367	6,2632757	20,2208673	0,309743
75	0,027443	0,027752	383	13763,9	381,972	1,0279984	19,27100468	0,053344
76	0,031145	0,029865	360	11377,77	339,802	20,1979795	18,15636758	1,112446
77	0,030601	0,032104	296	9524,193	305,7647	-9,7646978	17,20315169	**-0,567611**
78	0,034126	0,034684	274	7891,18	273,6974	0,302639	16,25436719	0,018619
79	0,033814	0,037184	220	6395,613	237,8168	-17,8167872	15,13187768	**-1,177434**
80	0,042072	0,040114	226	5257,922	210,9155	15,0845439	14,22866217	1,060152
81	0,045803	0,042707	208	4436,398	189,4658	18,5341972	13,46752628	1,376214

dokončenie

Vek	q_x	$\hat{q}_x$	D_x	E_x	$\hat{q}_x \cdot E_x$	$D_x - (\hat{q}_x \cdot E_x)$	$\sqrt{\hat{q}_x \cdot E_x \cdot (1-\hat{q}_x)}$	Z_x
82	0,046764	0,044451	189	3946,31	175,416	13,5839989	12,94676205	1,04922
83	0,043274	0,045777	158	3571,545	163,4947	-5,4947414	12,49041377	**-0,439917**
84	0,052453	0,047245	177	3285,167	155,2073	21,7926684	12,16036923	1,792106
85	0,048296	0,047849	126	2545,39	121,7942	4,2058365	10,76877172	0,390559
86	0,039217	0,048341	78	1949,688	94,24911	-16,24910837	9,470641474	**-1,715735**
87	0,052499	0,050045	92	1705,998	85,3762	6,62379931	9,005752197	0,735508
88	0,055958	0,051638	83	1441,348	74,42765	8,57235058	8,401451671	1,020342
89	0,049497	0,052798	61	1201,645	63,44464	-2,4446418	7,752088844	**-0,315353**
90	0,051711	0,053258	54	1017,024	54,16427	-0,16427178	7,160978471	**-0,02294**
91	0,062942	0,052692	62	953,698	50,25229	11,74770855	6,899593879	1,702667
92	0,055451	0,049913	52	911,5225	45,49653	6,50346708	6,57462387	0,989177
93	0,057838	0,045658	52	872,7988	39,84983	12,15017341	6,166877843	1,970231
94	0,029011	0,039944	25	849,1823	33,92011	-8,92011254	5,706592034	**-1,563124**
95	0,029501	0,034244	25	834,8741	28,58916	-3,58916224	5,254537479	**-0,68306**
96	0,031322	0,029068	26	817,0206	23,7488	2,25120445	4,801924199	0,468813
97	0,021508	0,023903	16	735,8707	17,58978	-1,58978168	4,143588637	**-0,383673**
98	0,02327	0,019237	15	637,0814	12,25526	2,74474497	3,466915932	0,791696
99	0,008833	0,015022	5	563,5343	8,465232	-3,465232346	2,887571702	**-1,200051**
100	0,020407	0,011261	10	485,0141	5,46155	4,538449696	2,32380076	1,953029

Zdroj: vlastné spracovanie

Nulovú hypotézu na hladine α nezamietame ($12 \leq 21 \leq 24$) a môžeme tvrdiť, že nenastáva veľký počet kladných alebo záporných odchýlok. Záverečný výrok po testovaní graduovaných hodnôt uvedenými zvyšnými tromi testami (test zmeny znamienok, test kumulovaných odchýlok, Stevensonov test) je totožný. Následne môžeme tabuľku č. 3 prepočítať už s graduovanými hodnotami pravdepodobnosti úmrtia q_x.

5. ZÁVER

V prvej časti príspevku sme prezentovali základné pojmy súvisiace s modelovaním úmrtnosti v aktuárskej praxi. Druhá časť oboznamuje s databázou údajov, ktorá sa využije pri praktickej analýze – využili sme údaje z praxe, ktoré sú dostupné z NBS. V praktickej časti sme postupne a názorne vykonali konštrukciu úplnej úmrtnostnej tabuľky. Graficky prezentujeme vývoj nevyrovnaných hodnôt pravdepodobnosti úmrtia. Za najvhodnejšiu metódu graduácie pre celú úmrtnostnú tabuľku možno považovať Wittsteinovu 9-bodovú metódu. Presnosť graduácie pravdepodobnosti úmrtia sme následne testovali znamienkovým testom. Test preukázal dostatočnú presnosť graduácie. Všetky riešenia a tvorbu úmrtnostných tabuliek sme vykonali s využitím funkcionality softvéru MS Excel.

Predlžovanie ľudského života spôsobuje, že v rámci populácie sa zvyšujú počty ľudí, ktorí sú aj vo vyššom veku schopní vykonávať pracovnú činnosť, ale tiež náklady na ich zdravotnú starostlivosť. Ekonomické dôsledky populačného starnutia sú preto podnetom na širšie analýzy. Význam aktuárstva bude narastať najmä v súvislosti s výpočtami poistného a dôchodkov pre spomínané skupiny ľudí a relevantnosťou platných úmrtnostných tabuliek, ktoré poisťovne používajú ako záväzné.

LITERATÚRA

[1] BENJAMIN, B. – POLLARD, S. H.: The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics. London: Cambridge University Press, 1993. ISBN 05-210-7749-4.

[2] CIPRA, T.: Pojistná matematika: Teorie a praxe. Praha: Ekopress, 1999. ISBN 80-861-1917-3.
[3] FIALA, T.: Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru. Praha: Oeconomica, 2005. ISBN 80-245-0821-4.
[4] KRIŠKOVÁ, V.: Analýza úmrtnosti obyvateľov SR v dôchodkovom veku: diplomová práca. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, 2014.
[5] PÁLEŠ, M.: Využitie software pri výučbe predmetov z oblasti aktuárstva. MITAV 2014. Brno: Univerzita obrany v Brne. ISBN 978-80-7231-961-9.
[6] SEKEROVÁ, V. – BILÍKOVÁ, M.: Poistná matematika. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2007. ISBN 978-80-225-2301-2.
[7] SIVAŠOVÁ, D.: Aktuárska demografia v prostredí konkurenčného poistného trhu. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008. ISBN 978-80-225-2509-1.
[8] http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-poistovnictvom/zverejnovanie-udajov-podla-smernice-c-2004-113-es, stav k 22. 04. 2014.

RESUMÉ
Teoretická časť stručne a prehľadne vytyčuje nosné teoretické oblasti pre analyzovanie úmrtnosti, konštrukciu a graduáciu úmrtnostných tabuliek. V praktickej aplikácii uvádzame vzťahy aj konkrétne výpočty ukazovateľov, ktoré sú súčasťou podrobnej úmrtnostnej tabuľky. Graficky prezentujeme vývoj hrubých aj graduovaných hodnôt pravdepodobnosti úmrtia. Túto oblasť uzatvárame testovaním presnosti graduovaných hodnôt na základe príslušných testov. Pri všetkých výpočtoch využívame softvér MS Excel. Metodiku tejto analýzy možno využiť na priblíženie časti aktuárskej funkcie v oblasti demografických analýz.

RESUME
The theoretical part briefly and clearly sets out the fundamental theoretical scope for analysing mortality, construction and graduation of mortality tables. The practical application contains relationships and calculations as well for indicators which are part of a detailed mortality table. The development of non-graduated and graduated values of mortality probability is graphically presented. This field is closed by the accuracy of the graduated values based on relevant tests. The methodology for this analysis can be used to briefly introduce the actuarial function of demographic analysis.

PROFESIJNÝ ŽIVOTOPIS
Ing. Michal Páleš, PhD.*, od roku 2012 pôsobí ako odborný asistent (sekcia aktuárskych vied) a tajomník Katedry matematiky a aktuárstva FHI EU v Bratislave. V rámci pedagogickej činnosti vyučuje cvičenia k predmetom matematika, vybrané kapitoly z matematiky, teória pravdepodobnosti, teória rizika v poistení a programovacie techniky pre aktuárov. Vo svojej vedeckej práci sa orientuje na využitie matematickoštatistických metód v ekonómii a teórii rizika v neživotnom poistení (Panjerove rekurentné vzťahy, rozdelenia pravdepodobnosti využívané v aktuárskej praxi, softvérová podpora riadenia rizík).*

KONTAKT:
pales.euba@gmail.com