

SLOVENSKÁ ŠTATISTIKA a DEMOGRAFIA

SLOVAK STATISTICS
and DEMOGRAPHY

4/2014

ročník/volume 24

Recenzovaný vedecký časopis so zameraním na prezentáciu moderných štatistických a demografických metód a postupov.

Scientific peer-reviewed journal focusing on the presentation of modern statistical and demographic methods and procedures.

Článok/Article: 1

Typ článku/Type of article: vedecký článok/scientific article

Strany/Pages: 3 – 11

Dátum vydania/Publication date: 15. október 2014/October 15, 2014



Michal PÁLEŠ

**Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky
Ekonomickej univerzity v Bratislave**

MODELÝ RIADENIA RIZIKA V ZAISTENÍ

MODELS FOR MANAGING RISK IN REINSURANCE

ABSTRAKT

Príspevok je zameraný na analýzu rizika v oblasti zaistenia. Presnejšie na využitie Panjerových rekurentných vzťahov na určenie rozdelenia pravdepodobnosti celkovej škody a aplikácie kvótového zaistenia. Projekt, resp. požiadavky ORSA sú neoddeliteľnou súčasťou stratégie riadenia rizika všetkých poisťovní a poisťovacích skupín. Hlavným cieľom ORSA je pochopenie a identifikácia všetkých rizík, ktoré súvisia s poisťným trhom, a zvolenie vhodných nástrojov na ich analýzu a riešenie v súlade s kapitálovými požiadavkami a požiadavkami týkajúcimi sa technických rezerv. Článok teda opisuje jednu z možných metód analýzy rizika v súvislosti s kvótovým zaistením.

ABSTRACT

The aim of this paper is to provide analysis of risk and reinsurance. More specifically for the use of Panjer's recursion for determining the probability distribution of the total claim and application of the quota reinsurance. The project or the ORSA requirements are an integral part of risk management strategies for all insurance companies and insurance groups. The main objective of ORSA is to understand and identify all risks related to insurance markets and selecting appropriate tools for their analysis and solution (in accordance with the capital and requirements for technical provisions). The paper describes one of the possible methods for risk analysis in connection with quota reinsurance.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

zaistenie, Panjerove rekurentné vzťahy, rozdelenie celkovej škody, ORSA, aktuárske modelovanie, Solvency II, aktuársky softvér

KEY WORDS

reinsurance, Panjer's recursion, total claim distribution, ORSA, actuarial modeling, Solvency II, actuarial software

1. ÚVOD

Významným indikátorom v poisťovniach v kontexte s ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment* – vlastné posúdenie rizika a solventnosti) sa stane zostavovanie relevantných interných modelov a rizikových scenárov. V príspevku sa zameriame na vyjadrenie návrhu kvantifikácie rizika v súvislosti s aplikáciou kvótového zaistenia a následne na vyjadrenie rozdelenia celkovej škody v prípade modelového portfólia údajov o počte a o individuálnej výške škody.

Vo všetkých typoch proporcionálneho zaistenia sa poisťná suma, individuálna výška škody a poisťné delia medzi prvopoisťovateľa a zaistovateľa v zmluvne určenom pomere pri rešpektovaní limitu zaistovateľa. V praxi sa teda najčastejšie

používajú dva typy proporcionálneho zaistenia – kvótové zaistenie a excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu.

2. ZAISTENIE

Zaistenie poistných rizík je nástrojom na rozloženie finančného krytia rizika tak, aby nebola ohrozená ekonomická stabilita poisťovateľa. Je nenahraditeľnou súčasťou poistného trhu. Umožňuje poisťovní preniesť na zaistovateľa časť rizík, ktoré presahujú jeho finančné schopnosti a mohli by narušiť stabilitu poistného kmeňa poisťovne.

Pod zaistením môžeme rozumieť opätovné poistenie časti rizika. Zaistovateľ poskytuje ochranu poisťovateľovi presne v tej istej pozícii, ako ju poisťovateľ poskytuje poistencovi – ponúka krytie proti neobvyklým alebo mimoriadnym stratám. Zaistenie má vo všeobecnosti tie isté ciele ako poistenie, čiže transfer rizika a následnú elimináciu alebo redukciu rizika tvorbou širšieho rozsahu miery rizika.

Hlavným dôvodom zaistenia je znižovanie nadmerných rizík poisťovateľa. Zaistenie rozdelí pôvodné riziko na časti tak, aby poisťovateľ a zaistovateľ nemali finančné problémy v prípade realizácie rizika. Dôsledky škôd pre poisťovne sú následne ekonomicky únosnejšie.

Zaistovne sú spoločnosti, ktoré disponujú obrovskými zaistnými kmeňmi, a teda vysokou koncentráciou kapitálu. Vďaka tomu sú schopné prevziať i tie riziká, ktoré by poisťovne bez zaistenia neboli schopné znášať. Poisťovňa s takto dohodnutým zaistením môže uzatvoriť poistné zmluvy, ktoré presahujú jej finančné možnosti, čo jej umožňuje niekoľkonásobne zvýšiť rozsah prijatých poistení, čím sa podľa zákona veľkých čísel zníži rozptyl rizika. Prvopoisťovateľ tak dosahuje pomocou zaistenia homogenitu poistného kmeňa, zvyšuje upisovaciu kapacitu, uvoľňuje finančné zdroje, a tým zvyšuje solventnosť a má možnosť preberať nové riziká, s ktorými nemá skúsenosti. Zaistenie tak vytvára ekonomickú stabilitu poisťovne, čím ovplyvňuje celkové výsledky poisťovníctva a prispieva tým k zlepšeniu stability celého sektora národného hospodárstva.

Pri **fakultatívnom** (dobrovoľnom) **zaistení** musí poisťovateľ poskytnúť zaistovateľovi všetky dostupné informácie tak, aby zaistovateľ mohol presne zhodnotiť mieru rizika, ktoré má prebrať. Je to však na úkor zvýšených administratívnych nákladov na individuálne riziká, pretože ohodnotenie rizika je časovo náročnejšie a zmluvy sa prehodnocujú každý rok.

Obligatórne (povinné) **zaistenie** sa týka poistného portfólia cedenta (poisťovateľa v zaistnom vzťahu). Vzniklo ako výsledok hľadania spôsobu zaistenia, ktorý by odstránil nedostatky fakultatívneho zaistenia – faktora času a nákladov. Administratívne náklady bývajú nižšie, pretože odpadá individuálne posudzovanie jednotlivých rizík navrhovaných do poistenia. Typickým prvkom obligatórneho zaistenia je jeho časová kontinuita.

Rozlišujeme dva typy zaistenia – *proporcionálne* a *neporcionálne* podľa diverzifikácie rizika.

Vo všetkých typoch **proporcionálneho zaistenia** sa poistná suma, individuálna výška škody a poistné delia medzi prvopoistoiteľa a zaistovateľa v zmluvne určenom pomere pri rešpektovaní limitu zaistovateľa. V praxi sa najčastejšie používajú dva typy proporcionálneho zaistenia – *kvótové zaistenie* a *excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu*. [4]

Neproporcionálne zaistenie je charakterizované rozdelením zodpovednosti medzi cedenta a zaistovateľa založeným na vzniku a výške škody a nie na poistnej sume, resp. poistnom ako pri proporcionálnom zaistení, keď sú parametre cesie vopred dané. V prípade proporcionálneho zaistenia sa zaistovateľ podieľa na každej škode, pri neproporcionálnom kryje výšku škody iba v prípade, ak vzniknutá škoda presiahne prvopoistoiteľovi prioritu. Priorita neproporcionálneho zaistenia sa uplatňuje buď osobitne pri jednotlivých poistných zmluvách, *škodovom nadmerku na riziko* (WXL/R, Working Excess of Loss Per Risk), alebo pri viacerých poistných zmluvách podliehajúcich rovnakej škodovej udalosti, ktorá môže mať aj *katastrofický charakter* (WXL/E, Working Excess of Loss Per Event, resp. CatXL, Catastrophe Excess of Loss). Používa sa aj ochrana v súvislosti s *celoročným objemom škôd* (SL, Stop Loss Reinsurance).

Dôležité však je na jednoduché portfólio využiť aj kombinácie rôznych typov ochrán. Vzniká otázka, kedy použiť konkrétny druh zaistenia, resp. v akom poradí jednotlivé ochrany optimálne skladať. V ďalších úvahách, ako už bolo naznačené v úvode, sa budeme venovať len kvótovým zaisteniam. Inak sa náročnosť výpočtu odvíja od zvolenej zaistovacej ochrany, resp. od jej kombinácie.

3. KVÓTOVÉ ZAISTENIE

V kvótovom zaistení (quota share reinsurance) sa poistná suma, individuálna výška škody a poistné delia medzi prvopoistoiteľa a zaistovateľa v rovnakom pomere danom zmluvne dohodnutou kvótou q ; $0 < q < 1$.

Pre poistnú sumu S , individuálnu výšku škody X a poistné P poistovateľa (rozlíšime použitím horného indexu P) v prípade kvótového zaistenia s kvótou q platí

$$\begin{aligned} {}^P S_q &= qS \\ {}^P X_q &= qX \\ {}^P P_q &= qP \end{aligned}$$

a pre zaistovateľa (rozlíšime použitím horného indexu Z) platí

$$\begin{aligned} {}^Z S_q &= (1 - q)S \\ {}^Z X_q &= (1 - q)X \\ {}^Z P_q &= (1 - q)P. \end{aligned}$$

Pre distribučnú funkciu celkovej škody pri použití kvótového zaistenia s kvótou q platí

$$F_{S_q^{kol}}(x) = P(qS^{kol} \leq x) = P\left(S^{kol} \leq \frac{x}{q}\right) = F_{S^{kol}}\left(\frac{x}{q}\right).$$

Hustotu pravdepodobnosti vyjadríme ako

$$f_{S_q^{kol}}(x) = \frac{dF_{S^{kol}}\left(\frac{x}{q}\right)}{dx} = \frac{1}{q} f_{S^{kol}}\left(\frac{x}{q}\right),$$

a preto môžeme vyjadriť pravdepodobnostnú funkciu rozdelenia celkovej škody poisťovateľa v tvare

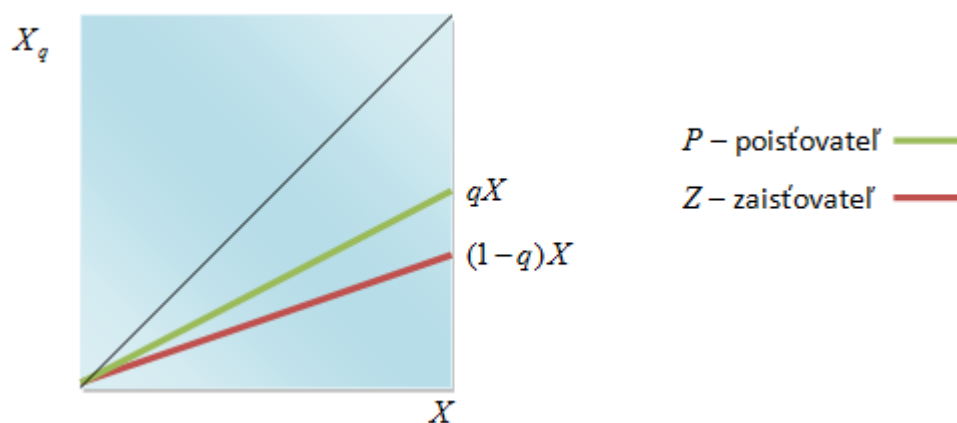
$$P_{P_{S_q^{kol}}}(x) = P_{S^{kol}}\left(\frac{x}{q}\right)$$

a v prípade zaistovateľa

$$P_{Z_{S_q^{kol}}}(x) = P_{S^{kol}}\left(\frac{x}{1-q}\right).$$

Výhodou, pre ktorú sa kvótové zaistenie často využíva, je najmä jeho administratívna a právna nenáročnosť. K nevýhodám kvótového zaistenia patrí to, že sa týka aj poisťiek s malými poistnými sumami a neprispieva tak k homogenizácii poistného kmeňa.

Obrázok č. 1: Diverzifikácia individuálnej výšky škody pri kvótovom zaistení



Zdroj: vlastné spracovanie

4. ROZDELENIE CELKOVEJ ŠKODY

Na určenie **pravdepodobnosti rozdelenia celkovej škody** využijeme Panjerov rekurentný vzťah pre triedu označenú Panjerom ako $(a, b, 0)$:

$$P_{S^{kol}}(x) = \frac{1}{(1 - a \cdot p_X(0))} \left(\sum_{k=1}^x \left(a + \frac{b \cdot k}{x} \right) p_X(k) \cdot P_{S^{kol}}(x - k) \right),$$

kde a , b sú konštanty, ktoré možno vyjadriť pomocou parametrov jednotlivých diskretných rozdelení, ktoré vyhovujú základnému Panjerovmu vzťahu pre počet

škôd, a to pre *Poissonove, binomické, negatívne binomické a geometrické rozdelenie*. Napr. ak $N \sim Po(\lambda)$, potom $a = 0$, $b = \lambda$. Podrobnejšie sa čitateľ môže s problematikou rekurentných vzťahov oboznámiť napr. v [2], [4].

Spomenutý rekurentný vzťah v prípade zaistenia portfólia proporcionálnymi ochranami modifikujeme pre prvopoistovateľa na tvar

$$p_{p_{S^{\text{kol}}}}(x) = \frac{1}{(1 - a \cdot p_{p_{X_s}}(0))} \left(\sum_{k=1}^x \left(a + \frac{b \cdot k}{x} \right) p_{p_{X_s}}(k) \cdot p_{p_{S^{\text{kol}}}}(x-k) \right)$$

a pre zaistovateľa

$$p_{z_{S^{\text{kol}}}}(x) = \frac{1}{(1 - a \cdot p_{z_{X_s}}(0))} \left(\sum_{k=1}^x \left(a + \frac{b \cdot k}{x} \right) p_{z_{X_s}}(k) \cdot p_{z_{S^{\text{kol}}}}(x-k) \right),$$

kde symbol \bullet vo vzťahoch vyjadruje príslušnú proporcionálnu ochranu s počiatočnou podmienkou

$$p_{S^{\text{kol}}}(0) = p_N(0).$$

V prípade, že v uvedených dvoch vzťahoch symbol \bullet nahradíme q , dostávame rekurentné vzťahy na výpočet pravdepodobnostnej funkcie celkovej škody pre kvótové zaistenie. Ak napr. symbol \bullet nahradíme α , dostávame excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu.

Je teda zrejmé, že v prípade proporcionálnych ochrán pre individuálnu výšku škody platí

$$X_s = {}^P X_s + {}^Z X_s.$$

5. PRAKTICKÁ UKÁŽKA

V praktickej časti sa pokúsime vyjadriť celkovú škodu poistovateľa aj zaistovateľa na základe modelových údajov. Formulácia modelu je prispôbená zámeru autora priblížiť postup riešenia s využitím aktuárskeho softvéru VOSE ModelRisk 4. Model je využiteľný aj na rozsiahlejšie súbory údajov a v prípade potreby ho možno rozšíriť modifikáciou zadania, resp. vstupov.

Analyzujeme vplyv kvótového zaistenia, ak napr. $q = 0,6$, na rozdelenie celkovej škody v prípade, ak poznáme konkrétne údaje o počte škôd na jednu poistnú zmluvu (obr. č. 2) a 96 hodnôt individuálnej výšky škody (obr. č. 3). Hodnoty sú modelom praktickej situácie v poisťovni (v nešpecifikovaných peňažných jednotkách).

Z dát opisujúcich počet škôd určíme charakteristiky počtu škôd a na základe týchto hodnôt možno metódou momentov odhadnúť parametre (diskrétného) rozdelenia počtu škôd, ktoré je pre uvedené dáta najvhodnejším modelom.

Obrázok č. 2: Údaje o počte škôd

Number of claim	Observed frequency
0	1636
1	644
2	1240
3	48
4	18
5	7
6	4
7	0
8	0
9	0
10	0

Zdroj: modelové údaje, vlastné spracovanie

Obrázok č. 3: Údaje o výške škody

1.	160	13.	1776	25.	2994	37.	4742	49.	8358	61.	12286	73.	18876	85.	33544
2.	174	14.	1802	26.	3146	38.	5014	50.	8412	62.	12404	74.	19796	86.	36300
3.	484	15.	1868	27.	3280	39.	5438	51.	8948	63.	12676	75.	20598	87.	40040
4.	558	16.	1988	28.	3332	40.	5492	52.	9174	64.	13444	76.	20968	88.	46378
5.	676	17.	2000	29.	3518	41.	5862	53.	9922	65.	13684	77.	22404	89.	47982
6.	762	18.	2180	30.	3598	42.	5914	54.	10240	66.	14836	78.	22802	90.	49518
7.	876	19.	2292	31.	3730	43.	6412	55.	10346	67.	15982	79.	23260	91.	57868
8.	1054	20.	2378	32.	3934	44.	6974	56.	10828	68.	16034	80.	23280	92.	60908
9.	1372	21.	2432	33.	4034	45.	7160	57.	11068	69.	16696	81.	23386	93.	108412
10.	1590	22.	2484	34.	4444	46.	7174	58.	11300	70.	17126	82.	26942	94.	116590
11.	1598	23.	2504	35.	4550	47.	7616	59.	12054	71.	18060	83.	29982	95.	167670
12.	1684	24.	2544	36.	4578	48.	7982	60.	12114	72.	18524	84.	33154	96.	387578

Zdroj: modelové údaje, vlastné spracovanie

Charakteristiky počtu škôd na jednu poisťnú zmluvu náhodnej premennej N môžeme vyjadriť (v súlade s označením podľa [2]) ako

$$E(N) = 0,955788249$$

$$D(N) = 0,956608823.$$

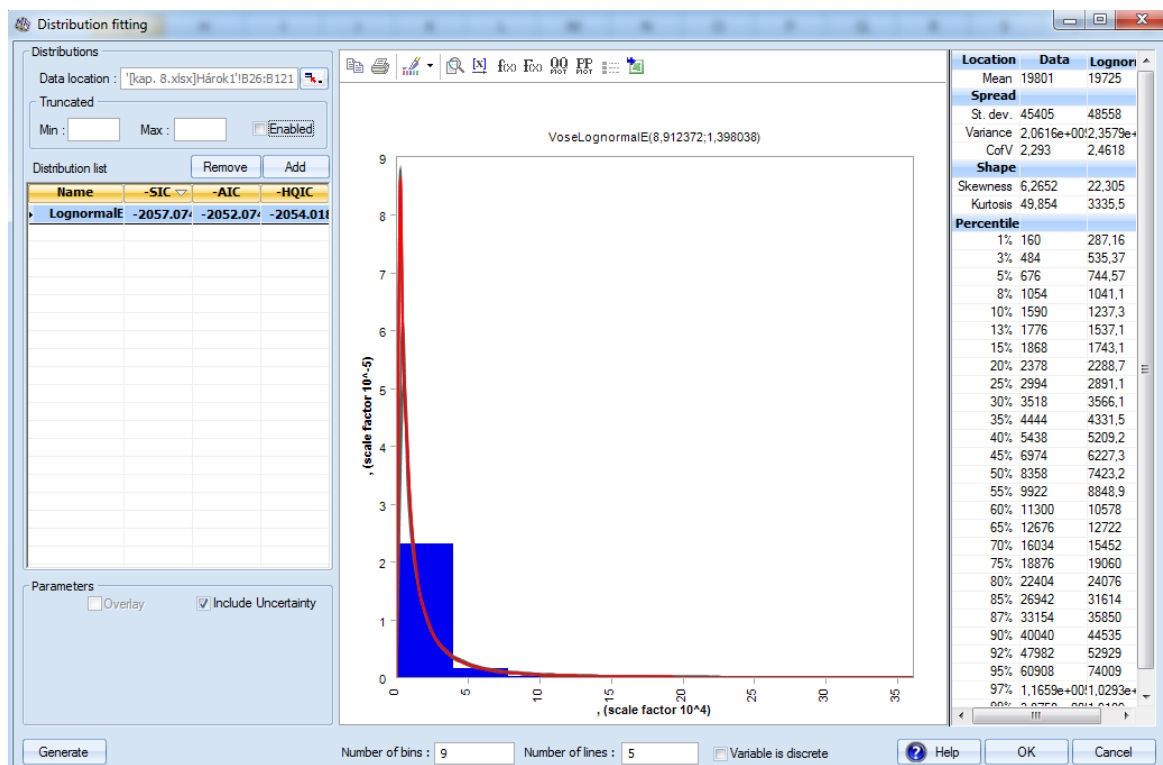
Z uvedeného vyplýva $E(N) \cong D(N)$, a preto môžeme konštatovať, že vhodným rozdelením pravdepodobnosti opisujúcej počet škôd je Poissonovo rozdelenie $N \sim Po(\lambda)$, $\lambda \cong 0,95$. Pre Panjerove konštanty, ako sme už uviedli, platí

$$a = 0$$

$$b = \lambda = 0,95.$$

Rozdelenie individuálnej výšky škody určíme prostredníctvom procedúry distribution fitting (obrázok č. 4), ktorá na základe metódy maximálnej vierohodnosti odhadne parametre najvhodnejšieho spojitého rozdelenia opisujúceho výšku škody (softvér používa pri testoch dobrej zhody informačné kritériá SIC, AIC, HQIC).

Obrázok č. 4: Distribution fitting



Zdroj: VOSE ModelRisk 4.0

Výstup v pravej časti uvádza niektoré charakteristiky náhodnej premennej X (strednú hodnotu, disperziu, koeficient šikmosti, špicatosti, kvantily...). V tomto prípade je individuálna výška škody vyjadrená lognormálnym rozdelením s odhadnutými parametrami

$$X \sim LN(8,9124; 1,3981).$$

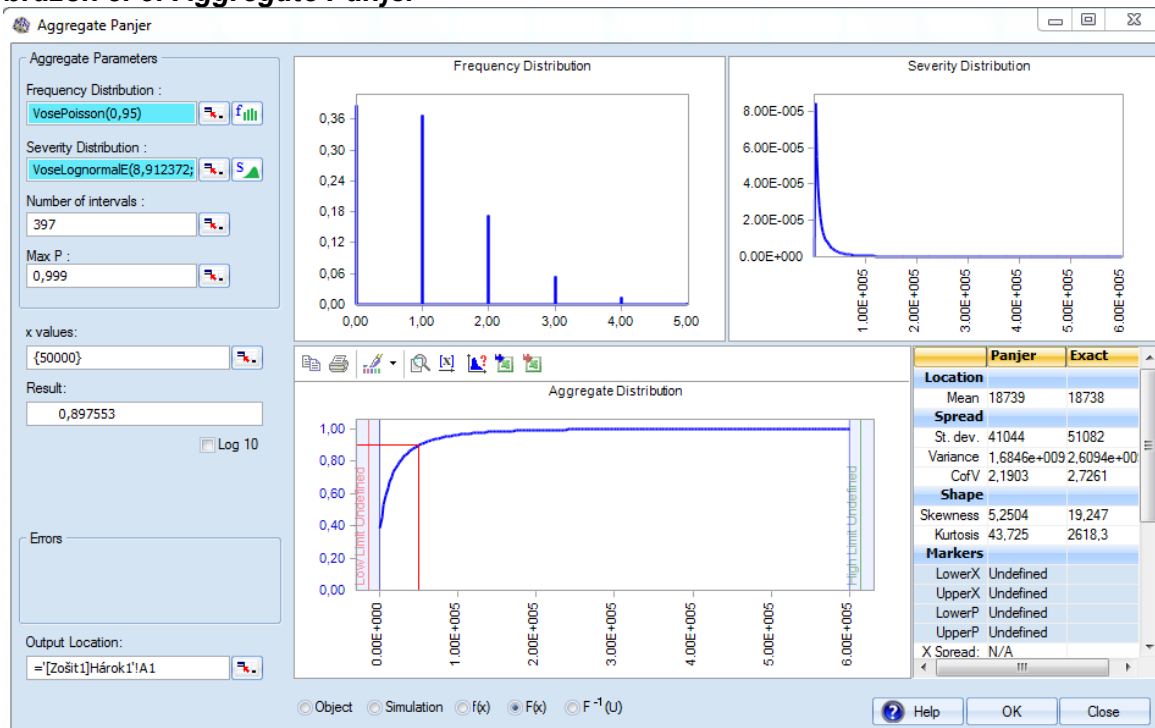
Stanovenie rozdelenia celkovej škody v prípade individuálnej výšky škody so spojitým zákonom rozdelenia je náročné (a priamo nemožno aplikovať vzťahy uvedené v časti 4). Softvér VOSE ModelRisk 4 však pri výpočte využíva diskretizáciu spojitej individuálnej výšky škody. Potom na základe procedúry Aggregate Panjer (obr. č. 5) získame hodnotu očakávanej celkovej škody

$$E(S^{kol}) = 18739.$$

Napriek tomu, že VOSE ModelRisk 4 nedisponuje modulom zaistenia, v prípade kvótového zaistenia využitím odvodených vzťahov je možné vyjadriť **očakávanú celkovú škodu vyplývajúcu z proporcionálneho rozloženia rizika poisťovateľa (P) a zaistovateľa (Z) vzhľadom na uvažovanú kvótu $q = 0,6$ ako**

$$E({}^P S_q^{kol}) = 11243$$

$$E({}^Z S_q^{kol}) = 7495.$$

Obrázok č. 5: Aggregate Panjer

Zdroj: VOSE ModelRisk 4.0

Z výstupu môžeme rovnako zistiť hodnoty pravdepodobnostnej funkcie celkovej škody, distribučnej funkcie celkovej škody, kvantilov a ďalších mier rizika (prepínacie tlačidlo v spodnej časti; $f(x)$, $F(x)$, resp. $F^{-1}(U)$) a tie následne upraviť na kvótové zaistenie s dohodnutou kvótou q .

VOSE ModelRisk 4 porovnáva pri každom výpočte hodnoty zvolenej procedúry s exaktnými metódami, pričom výsledok strednej hodnoty (Mean) môžeme overiť (aj podľa obrázkov č. 5 a 6) takto:

$$E(N) = \lambda = 0,95$$

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = 19725$$

$$E(S^{kol}) = E(N) \cdot E(X) = 18738.$$

Prípadný rozdiel hodnôt medzi procedúrou *Panjer* a *Exact* možno pripisovať odchýlkam pri diskretizácii spojitaj individuálnej výšky škody; tieto rozdiely eliminujeme nastavením počtu intervalov v ponuke *Number of intervals*.

Počet škôd na jednu poistnú zmluvu aj hodnoty individuálnej výšky škody, ktoré sú základom na stanovenie celkovej škody, možno v praxi sledovať na základe informácií z likvidácií poistných udalostí a tie následne spracovať na danú analýzu.

6. ZÁVER

V príspevku sme prezentovali návrh scenára, ktorý na základe vstupných dát uskutoční redukciu rizika využitím kvótového zaistenia. Uvedené výsledky nie sú jediné, ktoré môžeme využitím týchto analýz dosiahnuť. Aktuár má možnosť na základe typu skúmaného rizika vytvoriť rôzne scenáre, graficky ich znázorniť

a navyše uvedené postupy môže rozšíriť o skladanie rôznych druhov proporcionálnych ochrán, prípadne o optimalizáciu zaistovacieho programu.

Príspevok je výstupom z projektu č. I-14-102-00 – Riadenie rizík v kontexte s požiadavkami ORSA projektu Solvency II.

LITERATÚRA

- [1] CIPRA, T.: Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. Praha: Grada Publishing, 2004. ISBN: 80-247-0838-8.
- [2] HORÁKOVÁ, G. – MUCHA, V.: Teória rizika v poistení. II. časť. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008. ISBN 978-80-225-2549-7.
- [3] CHMELOVÁ, P.: Alternatívny transfer rizika. Dizertačná práca. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, 2010.
- [4] PÁLEŠ, M.: Rekurentné vzťahy pre aktuárov a ich aplikácia v oblasti zaistenia. Dizertačná práca. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, 2012.
- [5] PÁLEŠ, M. – POLÁČEK, Š.: Implementácia projektu ORSA v poisťovniach. In: Actuarial science in theory and in practice: 9th international scientific conference. Bratislava: EU v Bratislave, 2013. ISBN 978-80-225-3639-4.

RESUMÉ

V praktickej aplikácii sme prepojili výpočty so vzťahmi vyjadrenými v teoretickej časti. Na základe údajov o počte škôd a individuálnej výške škody sme prostredníctvom Panjerových rekurentných vzťahov vyjadrili výšku celkovej škody. Predpokladali sme kvótové (proporcionálne) zaistenie so stanovenou výškou kvóty. Na základe tohto predpokladu sme následne mohli vyjadriť očakávanú škodu poisťovateľa aj zaistovateľa z tohto rizika. Výsledky tejto analýzy možno ďalej využiť pri analýzach mier rizika Value-at-risk, pravdepodobnosti krachu, optimalizáciách zaistovacích reťazcov a pod.

RESUME

In practical application calculations were aligned with the relations expressed in the theoretical part. Based on the data on the number of claims and individual claim size the total claim size was expressed by means of Panjer's excursion. We assumed quota (proportional) reinsurance with fixed quota amount. Based on this assumption, we expressed the expected claim of insurer and reinsurer of this risk. The results from this analysis can be further used for analysing the measure of risk (Value-at-risk), ruin probability, optimization of reinsurance chains, etc.

PROFESIJNÝ ŽIVOTOPIS

Ing. Michal Páleš, PhD., v roku 2012 ukončil doktorandské štúdium na Katedre matematiky FHI EU v Bratislave, študijný program kvantitatívne metódy v ekonómii. Od tohto roka je tajomníkom Katedry matematiky a aktuárstva FHI EU v Bratislave. V rámci pedagogickej činnosti vyučuje cvičenia k predmetom matematika, teória pravdepodobnosti, teória rizika v poistení II a programovacie techniky pre aktuárov. Vo svojej vedeckej práci sa orientuje na využitie matematickoštatistických metód v ekonómii a teórii rizika v neživotnom poistení (Panjerove rekurentné vzťahy, rozdelenia pravdepodobnosti využívané v aktuárskej praxi, softvérová podpora riadenia rizík).

KONTAKT

pales.euba@gmail.com